Operadores cíclico convexos

T. Bermúdez, A. Bonilla * and N. Feldman

* Departamento de Analisis Matematico
Universidad de La Laguna

Introducción

Definición

Un operador lineal y continuo T en un espacio de Banach X se dice hiperciclico(débilmente hiperciclico) si existe un vector $x \in X$, cuya órbita $\{T^n x : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es densa (con la topología débil) en X.

Introducción

Definición

Un operador lineal y continuo T en un espacio de Banach X se dice hiperciclico(débilmente hiperciclico) si existe un vector $x \in X$, cuya órbita $\{T^n x : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es densa (con la topología débil) en X.

Definición

Un operador lineal y continuo T en un espacio de Banach X se dice ciclico(cíclico convexo) si existe un vector $x \in X$, tal que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de la órbita $\{p(T)x : p \text{ polinomio}\}$(el conjunto de las combinaciones lineales convexas de la órbita $\{p(T)x : p \text{ polinomio convexo}\}$ es denso en X.

Definición

Un operador lineal y continuo T en un espacio de Banach X se dice hiperciclico(débilmente hiperciclico) si existe un vector $x \in X$, cuya órbita $\{T^n x : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es densa (con la topología débil) en X.

Definición

Un operador lineal y continuo T en un espacio de Banach X se dice ciclico(cíclico convexo) si existe un vector $x \in X$, tal que el conjunto de las combinaciones lineales finitas de la órbita $\{p(T)x : p \text{ polinomio }\}$(el conjunto de las combinaciones lineales convexas de la órbita $\{p(T)x : p \text{ polinomio convexo }\}$ es denso en X.

$$hiperciclico \Rightarrow w-hiperciclico \Rightarrow ciclico\ \ convexo \Rightarrow ciclico$$

$$hiperciclico \Rightarrow w-hiperciclico \Rightarrow ciclico\ \ convexo \Rightarrow ciclico$$

$$hiperciclico \Rightarrow w - hiperciclico \Rightarrow ciclico\ \ convexo \Rightarrow ciclico$$

H. Rezaei, On the convex hull generated by orbit of operators, Linear Algebra and its Applications, **438** (2013), 4190-4203.

$$\textit{hiperciclico} \Rightarrow w - \textit{hiperciclico} \Rightarrow \textit{ciclico}\ \ \textit{convexo} \Rightarrow \textit{ciclico}$$

H. Rezaei, On the convex hull generated by orbit of operators, Linear Algebra and its Applications, **438** (2013), 4190-4203.

Cuestión

Es todo operador ciclico convexo en un espacio infinitamente dimensional débilmente hiperciclico?

$$\textit{hiperciclico} \Rightarrow w - \textit{hiperciclico} \Rightarrow \textit{ciclico convexo} \Rightarrow \textit{ciclico}$$

H. Rezaei, On the convex hull generated by orbit of operators, Linear Algebra and its Applications, **438** (2013), 4190-4203.

Cuestión

Es todo operador ciclico convexo en un espacio infinitamente dimensional débilmente hiperciclico?

Cuestión

Si $S : X \to X$ *es un operador ciclico convexo en un espacio infinitamente dimensional, entonces es* S^n *un operador ciclico-convexo para todo entero* $n > 1$ *?*

$$\textit{hiperciclico} \Rightarrow w-\textit{hiperciclico} \Rightarrow \textit{ciclico convexo} \Rightarrow \textit{ciclico}$$

H. Rezaei, On the convex hull generated by orbit of operators, Linear Algebra and its Applications, **438** (2013), 4190-4203.

Cuestión

Es todo operador ciclico convexo en un espacio infinitamente dimensional débilmente hiperciclico?

Cuestión

Si $S : X \to X$ es un operador ciclico convexo en un espacio infinitamente dimensional, entonces es S^n un operador ciclico-convexo para todo entero $n > 1$?

Teorema

Un operador diagonal en $\mathbb{C}^m$ is ciclico convexo si y solo si tiene m autovalores distintos no reales fuera del disco unidad cerrado.

S. Grivaux, Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem. J. Operator Theory **54** (2005), no. 1, 147-168.

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable e infinito dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $T \oplus T$ *es hiperciclico.*
2. $T \oplus T$ *is ciclico.*

S. Grivaux, Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem. J. Operator Theory **54** (2005), no. 1, 147-168.

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable e infinito dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $T \oplus T$ *es hiperciclico.*
2. $T \oplus T$ *is ciclico.*

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable. Entonces $T \oplus -T$ es ciclico.

S. Grivaux, Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem. J. Operator Theory **54** (2005), no. 1, 147-168.

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable e infinito dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $T \oplus T$ *es hiperciclico.*
2. $T \oplus T$ *is ciclico.*

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable. Entonces $T \oplus -T$ es ciclico.

M. de la Rosa and Ch. Read, A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic. J. Operator Theory **61** (2009), no. 2, 369-380.

Un operador $T \in L(X)$ se dice Cesaro-hiperciclico si existe un vector $x \in X$ tal que el conjunto

$$\{\frac{x + Tx + \cdots + T^{N-1}x}{N}, \ N \in \mathbb{N}\}$$

es denso en X.

F. León-Saavedra, Operators with hypercyclic Cesaro means. Studia Math. **152** (2002), no. 3, 201–215.

Un operador $T \in L(X)$ se dice hiperciclico con soporte N si existe un vector $x \in X$ tal que el conjunto

$$\left\{ T^{k_1}x + T^{k_2}x + \cdots + T^{k_N}x \quad : \quad k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en X.

Un operador $T \in L(X)$ se dice hiperciclico con soporte N si existe un vector $x \in X$ tal que el conjunto

$$\left\{ T^{k_1}x + T^{k_2}x + \cdots + T^{k_N}x \quad : \quad k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en X.
O equivalentemente

$$\left\{ \frac{T^{k_1}x + T^{k_2}x + \cdots + T^{k_N}x}{N} \quad : \quad k_1, \ldots, k_N \in \mathbb{N} \right\}$$

es denso en X.

F. Bayart and G. Costakis, Cyclic operators with finite support, Israel J. of Math., **193**(2013), 131-167.

Definición

Sea $\varepsilon \in (0,1)$ y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo. Un vector $x \in X$ se dice es un vector ε-hiperciclico para T si para todo vector no nulo $y \in X$ existe un entero no negativo n tal que

$$\|T^n x - y\| \le \varepsilon \|y\|.$$

T se dice es ε-hiperciclico si tiene un vector ε-hiperciclico

C. Badea, S. Grivaux, V. Muller, Epsilon-hypercyclic operators. Ergodic Theory Dynam. Systems **30** (2010), no. 6, 1597-1606.

F. Bayart, Epsilon-hypercyclic operators on a Hilbert space. Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 11, 4037-4043.

Definición

Sea $\varepsilon \in (0,1)$ y $T : X \to X$ un operador lineal y continuo. Un vector $x \in X$ se dice es un vector ε-hiperciclico para T si para todo vector no nulo $y \in X$ existe un entero no negativo n tal que

$$\|T^n x - y\| \leq \varepsilon \|y\|.$$

T se dice es ε-hiperciclico si tiene un vector ε-hiperciclico

C. Badea, S. Grivaux, V. Muller, Epsilon-hypercyclic operators. Ergodic Theory Dynam. Systems **30** (2010), no. 6, 1597-1606.

F. Bayart, Epsilon-hypercyclic operators on a Hilbert space. Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 11, 4037-4043.

Teorema

Todo vector ε-hiperciclico es un vector ciclico convexo.

Sea x un vector ε-hiperciclico para T, probaremos que $\forall y \in X$ no nulo y $\delta > 0$, existe un polinomio convexo p tal que

$$\|p(T)x - y\| < \delta \, .$$

Sea x un vector ε-hiperciclico para T, probaremos que $\forall y \in X$ no nulo y $\delta > 0$, existe un polinomio convexo p tal que

$$\|p(T)x - y\| < \delta \ .$$

Puesto que $\varepsilon \in (0,1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2\varepsilon^N \|y\| < \delta$.

Sea x un vector ε-hiperciclico para T, probaremos que $\forall y \in X$ no nulo y $\delta > 0$, existe un polinomio convexo p tal que

$$\|p(T)x - y\| < \delta \; .$$

Puesto que $\varepsilon \in (0,1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2\varepsilon^N \|y\| < \delta$.Como x es un vector ε-hiperciclico para T, existe k_1 tal que

$$\left\| T^{k_1} x - Ny \| \leq \varepsilon \| Ny \right\| = \varepsilon N \|y\| \; .$$

Sea x un vector ε-hiperciclico para T, probaremos que $\forall y \in X$ no nulo y $\delta > 0$, existe un polinomio convexo p tal que

$$\|p(T)x - y\| < \delta \, .$$

Puesto que $\varepsilon \in (0,1)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $2\varepsilon^N \|y\| < \delta$.Como x es un vector ε-hiperciclico para T, existe k_1 tal que

$$\left\| T^{k_1}x - Ny \| \le \varepsilon \| Ny \right\| = \varepsilon N \|y\| \, .$$

Si $T^{k_1}x - Ny = 0$, elegimos l_2 tal que

$$\left\| T^{l_2}x - \frac{N}{N-1}\varepsilon^N y \right\| \le \varepsilon^{N+1} \frac{N}{N-1} \|y\| \, .$$

Por tanto

$$\left\| \frac{N-1}{N} T^{l_2}x - \varepsilon^N y \right\| \le \varepsilon^{N+1} \|y\| \, .$$

luego

$$\left\| \frac{1}{N} T^{k_1}x + \frac{N-1}{N} T^{l_2}x - y \right\| = \left\| \frac{N-1}{N} T^{l_2}x \right\| \le 2\varepsilon^N \|y\| < \delta$$

y la prueba finaliza con $p(z) = \frac{1}{N} z^{k_1} + \frac{N-1}{N} z^{l_2}$.

Si $T^{k_1}x - Ny \neq 0$, existe k_2 tal que

$$\left\| T^{k_1}x + T^{k_2}x - Ny \right\| = \left\| T^{k_2}x - (Ny - T^{k_1}x) \right\| \leq \varepsilon \| Ny - T^{k_1}x \| \leq \varepsilon^2 N \|y\| \,.$$

Si $T^{k_1}x - Ny \neq 0$, existe k_2 tal que

$$\left\| T^{k_1}x + T^{k_2}x - Ny \right\| = \left\| T^{k_2}x - (Ny - T^{k_1}x) \right\| \leq \varepsilon \|Ny - T^{k_1}x\| \leq \varepsilon^2 N \|y\| .$$

Si $T^{k_1}x + T^{k_2}x - Ny = 0$, elegimos l_3 tal que

$$\left\| \frac{1}{N} T^{k_1}x + \frac{1}{N} T^{k_2}x + \frac{N-2}{N} T^{l_3}x - y \right\| = \left\| \frac{N-2}{N} T^{l_3}x \right\| \leq 2\varepsilon^N \|y\| < \delta$$

y la prueba termina.

Si $T^{k_1}x - Ny \neq 0$, existe k_2 tal que

$$\left\| T^{k_1}x + T^{k_2}x - Ny \right\| = \left\| T^{k_2}x - (Ny - T^{k_1}x) \right\| \leq \varepsilon \| Ny - T^{k_1}x \| \leq \varepsilon^2 N \| y \| .$$

Si $T^{k_1}x + T^{k_2}x - Ny = 0$, elegimos l_3 tal que

$$\left\| \frac{1}{N} T^{k_1}x + \frac{1}{N} T^{k_2}x + \frac{N-2}{N} T^{l_3}x - y \right\| = \left\| \frac{N-2}{N} T^{l_3}x \right\| \leq 2\varepsilon^N \| y \| < \delta$$

y la prueba termina. Si $T^{k_1}x + T^{k_2}x - Ny \neq 0$, existe k_3 tal que

$$\left\| T^{k_1}x + T^{k_2}x + T^{k_3}x - Ny \right\| \leq \varepsilon^3 N \| y \| .$$

Por inducción, en el paso N, si $T^{k_1}x + T^{k_2}x + \cdots + T^{k_{N-1}}x - Ny = 0$, elegimos l_N tal que

$$\left\| \frac{1}{N} T^{k_1}x + \frac{1}{N} T^{k_2}x + \cdots + \frac{1}{N} T^{k_{N-1}}x + \frac{1}{N} T^{l_N}x - y \right\| \leq 2\varepsilon^N \|y\| < \delta$$

y terminamos.

Por inducción, en el paso N, si $T^{k_1}x + T^{k_2}x + \cdots + T^{k_{N-1}}x - Ny = 0$, elegimos l_N tal que

$$\left\| \frac{1}{N}T^{k_1}x + \frac{1}{N}T^{k_2}x + \cdots + \frac{1}{N}T^{k_{N-1}}x + \frac{1}{N}T^{l_N}x - y \right\| \leq 2\varepsilon^N \|y\| < \delta$$

y terminamos.
Si $T^{k_1}x + T^{k_2}x + \cdots + T^{k_{N-1}}x - Ny \neq 0$, existe k_N tal que

$$\left\| T^{k_1}x + T^{k_2}x + \cdots + T^{k_{N-1}}x + T^{k_N}x - Ny \right\| \leq \varepsilon^N N \|y\|$$

Por tanto

$$\left\| \frac{T^{k_1}x + \cdots + T^{k_N}x}{N} - y \right\| \leq \varepsilon^N \|y\| < \delta.$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Cesàro hiperciclico} \arrow[ddr, Rightarrow] & & \\
 & \text{w-hiperciclico} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\text{hiperciclico} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & & \text{cíclico convexo} \arrow[r, Rightarrow] & \text{cíclico} \\
 & \varepsilon\text{-hiperciclico} \arrow[ur, Rightarrow] & & \\
 & \text{hiperciclico con soporte } N \arrow[uur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

Propiedades, Rezaei

1. $\sigma_p(T^*) \cap (\overline{\mathbb{D}} \cup \mathbb{R}) = \emptyset$
2. Toda componente del espectro debe intersectar $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$
3. No existen operadores compactos en espacios infinito dimensionales ciclico convexos

La caracterización Hahn-Banach para ciclico convexos

Teorema

Sea X un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ y $E \subset X$. Son equivalentes:

1. *La envolvente convexa de E es densa en X.*
2. *Para todo funcional lineal y continuo f en X, la envolvente convexa de $Re(f(E))$ es densa en $\mathbb{R}$.*
3. *Para todo funcional lineal y continuo f en X tenemos que*
$$\sup Re(f(E)) = \infty \text{ and } \inf Re(f(E)) = -\infty.$$
4. *Para todo funcional lineal y continuo f en X tenemos que*
$$\sup Re(f(E)) = \infty.$$

Demostración.

$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.
(1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4).

(4) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $co(E)$ no es densa en X. Entonces existe un punto $p \in X$ que no pertenece a la clausura de $co(E)$.

Por el teorema de separación de Hahn-Banach, existe un funcional lineal y continuo f en X

$$Re(f(x)) < Re(f(p)) \ \forall x \in co(E).$$

Luego $Re(f(E))$ es acotado y por tanto $\sup Re(f(E)) \neq \infty$. $\square$

Corolario (La caracterización Hahn-Banach para operadores ciclico convexos)

Sea X un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, $T : X \to X$ un operador lineal y continuo, y $x \in X$. Entonces son equivalentes:

1. *x es un vector ciclico convexo para T .*
2. *Para todo funcional lineal y continuo f en X,*

$$\sup Re(f(Orb(T,x))) = \infty.$$

Corolario (La caracterización Hahn-Banach para operadores ciclico convexos)

Sea X un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, $T : X \to X$ un operador lineal y continuo, y $x \in X$. Entonces son equivalentes:

1. *x es un vector ciclico convexo para T .*
2. *Para todo funcional lineal y continuo f en X,*

$$\sup Re(f(Orb(T, x))) = \infty.$$

Definición

Un operador se dice 1-débilmente hiperciclico si para todo funcional lineal y continuo f en X tenemos que $(f(Orb(T, x)))$ es densa en $\mathbb{C}$.

N. S. Feldman, N-weakly hypercyclic and n-weakly supercyclic operators, J. Funct. Anal. 263 (2012), no. 8, 2255–2299.

Corolario (La caracterización Hahn-Banach para operadores ciclico convexos)

Sea X un espacio localmente convexo sobre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$, $T : X \to X$ un operador lineal y continuo, y $x \in X$. Entonces son equivalentes:

1. *x es un vector ciclico convexo para T .*
2. *Para todo funcional lineal y continuo f en X,*

$$\sup Re(f(Orb(T, x))) = \infty.$$

Definición

Un operador se dice 1-débilmente hiperciclico si para todo funcional lineal y continuo f en X tenemos que $(f(Orb(T, x)))$ es densa en $\mathbb{C}$.

N. S. Feldman, N-weakly hypercyclic and n-weakly supercyclic operators, J. Funct. Anal. 263 (2012), no. 8, 2255–2299.

$$w - hiperciclico \Rightarrow 1 - w - hiperciclico \Rightarrow ciclico\ \ convexo$$

Teorema

Si T es un operador ciclico convexo en un espacio localmente convexo X, entonces T tiene rango denso

Demostración.

Sea x un vector ciclico convexo para T y $R(T)$ no denso.

Entonces existe un funcional f tal que $f(R(T)) = \{0\}$ y $\sup Re(f(Orb(T,x)) = \infty$.

Absurdo porque $\sup Re(f(Orb(T,x)) = \sup Re(\{f(x), 0\}) < \infty$. $\square$

Teorema

Si T es ciclico convexo en X y $c > 1$, entonces cT es ciclico convexo. Además todo vector ciclico convexo para T es ciclico convexo para cT.

Demostración.

Sea x un vector ciclico convexo para T, entonces $\sup Re(f(T^n x)) = \infty$.

$$c > 1, \ \sup Re[f((cT)^n x)] = \sup c^n Re[f(T^n x)] \geq \sup Re[f(T^n x)] = \infty.$$

Por la caracterización Hahn-Banach, x es ciclico convexo para cT. $\square$

Teorema

Si T es ciclico convexo en X y $c > 1$, entonces cT es ciclico convexo. Además todo vector ciclico convexo para T es ciclico convexo para cT.

Demostración.

Sea x un vector ciclico convexo para T, entonces $\sup Re(f(T^n x)) = \infty$.

$$c > 1, \;\; \sup Re[f((cT)^n x)] = \sup c^n Re[f(T^n x)] \geq \sup Re[f(T^n x)] = \infty.$$

Por la caracterización Hahn-Banach, x es ciclico convexo para cT. $\square$

Corolario

Si $|c| \geq 1$ y T es débilmente hiperciclico, entonces cT es ciclico convexo.

Operadores ciclico convexos cuyo cuadrado no lo es

S. Grivaux, Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem. J. Operator Theory **54** (2005), no. 1, 147-168.

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable e infinito dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$T \oplus T$ es hiperciclico.*
2. *$T \oplus T$ is ciclico.*

Operadores ciclico convexos cuyo cuadrado no lo es

S. Grivaux, Hypercyclic operators, mixing operators, and the bounded steps problem. J. Operator Theory **54** (2005), no. 1, 147-168.

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable e infinito dimensional. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$T \oplus T$ es hiperciclico.*
2. *$T \oplus T$ is ciclico.*

F. Bayart and G. Costakis, Cyclic operators with finite support, Israel J. of Math., **193**(2013), 131-167.
S. Shkarin, Orbits of coanalytic Toeplitz operators and weak hypercyclicity, arXiv:1210.3191

Teorema

Sea T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable. Entonces $T \oplus -T$ es hiperciclico con soporte 2 y 1-débilmente hiperciclico

Corolario

Si T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable tal que $T \oplus T$ no es hiperciclico, entonces $T \oplus -T$ es ciclico convexo, pero no débilmente hiperciclico y $(T \oplus -T)^2$ no es ciclico.

Demostración.

Supongamos que T es hiperciclico tal que $T \oplus T$ no lo es . Entonces $T \oplus T$ no es ciclico.
Por tanto $(T \oplus -T)^2 = (T \oplus T)^2$ tampoco.
Luego $T \oplus -T$ no es débilmente hyperciclico, ya que en caso contrario $(T \oplus -T)^2 = (T \oplus T)^2$ sería débilmente hiperciclico y por tanto ciclico. $\square$

Corolario

Si T un operador hiperciclico en un espacio de Banach separable tal que $T \oplus T$ no es hiperciclico, entonces $T \oplus -T$ es ciclico convexo, pero no débilmente hiperciclico y $(T \oplus -T)^2$ no es ciclico.

Demostración.

Supongamos que T es hiperciclico tal que $T \oplus T$ no lo es . Entonces $T \oplus T$ no es ciclico.
Por tanto $(T \oplus -T)^2 = (T \oplus T)^2$ tampoco.
Luego $T \oplus -T$ no es débilmente hyperciclico, ya que en caso contrario $(T \oplus -T)^2 = (T \oplus T)^2$ sería débilmente hiperciclico y por tanto ciclico. $\square$

F. León-Saavedra, M. P. Romero de la Rosa , Powers of convex-cyclic operators, Abstract and Applied Analysis, volume **2014** (2014), Article ID 631894, 3 pages.

$$\mu > 1, \lambda I \oplus \mu B \ \ en \ \ \mathbb{C} \oplus l^p$$

Teorema

Sea $T \in L(X)$. Si T^2 es ciclico convexo, entonces $T \oplus -T$ también.

Teorema

Sea $T \in L(X)$. Si T^2 es ciclico convexo, entonces $T \oplus -T$ también.

Sea x un vector ciclico convexo para T^2 y $S := T \oplus -T$.

Teorema

Sea $T \in L(X)$. Si T^2 es ciclico convexo, entonces $T \oplus -T$ también.

Sea x un vector ciclico convexo para T^2 y $S := T \oplus -T$. Entonces dado $y \in X$ existe una sucesión (p_k) de polinomios convexos tal que $p_k(T^2)x$ converge a y. Por tanto

$$p_k(S^2)(x,x) \to (y,y) \, ,$$

y

$$Sp_k(S^2)(x,x) \to (Ty, -Ty) \, .$$

Teorema

Sea $T \in L(X)$. Si T^2 es ciclico convexo, entonces $T \oplus -T$ también.

Sea x un vector ciclico convexo para T^2 y $S := T \oplus -T$. Entonces dado $y \in X$ existe una sucesión (p_k) de polinomios convexos tal que $p_k(T^2)x$ converge a y. Por tanto

$$p_k(S^2)(x,x) \to (y,y)\,,$$

y

$$Sp_k(S^2)(x,x) \to (Ty,-Ty)\,.$$

Puesto que T^2 es ciclico convexo, T también. Luego el rango de T es denso.

Como $p_k(x^2)$ y $xp_k(x^2)$ son polinomios convexos, la clausura de la envolvente convexa $Orb(S,(x,x))$ contiene a los espacios $L_0 := \{(u,u) : u \in X\}$ y $L_1 := \{(u,-u) : u \in X\}$.

Dados $(y,z) \in X \times X$, sean (q_k) y (h_k) la sucesión de polinomios convexos tal que

$$q_k(S^2)(x,x) \to (y+z, y+z)$$

y

$$Sh_k(S^2)(x,x) \to (y-z, z-y) \, .$$

Como $p_k(x^2)$ y $xp_k(x^2)$ son polinomios convexos, la clausura de la envolvente convexa $Orb(S,(x,x))$ contiene a los espacios $L_0 := \{(u,u) : u \in X\}$ y $L_1 := \{(u,-u) : u \in X\}$.

Dados $(y,z) \in X \times X$, sean (q_k) y (h_k) la sucesión de polinomios convexos tal que

$$q_k(S^2)(x,x) \to (y+z, y+z)$$

y

$$Sh_k(S^2)(x,x) \to (y-z, z-y) .$$

Entonces $p_k(t) := \frac{1}{2}q_k(t^2) + \frac{1}{2}th_k(t^2)$ es una sucesión de polinomios convexos tal que

$$p_k(S)(x,x) \to (y,z) .$$

Luego $S = T \oplus -T$ es ciclico convexo.

Corolario

Si T es debilmente hiperciclico entonces $T \oplus -T$ es ciclico convexo.

Diagonal Operators and Adjoint Multiplication Operators

Teorema

Sea $T : X \to X$ un operador lineal y continuo en un espacio Fréchet real o complejo. Son equivalentes:

1. *T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos.*
2. *T es transitivo convexo. Esto es,para cualquier par de abiertos U, V en X, existe un polinomio convexo p tal que $p(T)U \cap V \neq \emptyset$.*
3. *T tiene un G_δ denso de vectores ciclico convexos.*

Teorema

Sea $\{T_k : X_k \to X_k\}_{k=1}^{\infty}$ *una sucesión de operadores uniformemente acotados en una sucesión de espacios de Banach* $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ *tal que para todo* $n \geq 1$*, el operador* $S_n = \bigoplus_{k=1}^{n} T_k$ *on* $X^{(n)} = \bigoplus_{k=1}^{n} X_k$ *tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos. Entonces* $T = \bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k$ *es ciclico convexo en* $X^{(\infty)} = \bigoplus_{k=1}^{\infty} X_k$ *y tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos.*

Demostración.

Veamos que T es transitivo convexo en $X^{(\infty)}$.

Demostración.

Veamos que T es transitivo convexo en $X^{(\infty)}$.

Sean U y V dos abiertos no vacios en $X^{(\infty)}$. Podemos elegir $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ e $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ en $X^{(\infty)}$ tal que $x_k = 0$ e $y_k = 0$ $\forall k \geq N$ con $x \in U$ e $y \in V$.

Demostración.

Veamos que T es transitivo convexo en $X^{(\infty)}$.

Sean U y V dos abiertos no vacios en $X^{(\infty)}$. Podemos elegir $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ e $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ en $X^{(\infty)}$ tal que $x_k = 0$ e $y_k = 0$ $\forall k \geq N$ con $x \in U$ e $y \in V$.

Puesto que S_N tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos en $X^{(N)}$, existe un vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N) \in X^{(N)}$ tal que u es un vector ciclico convexo para S_N y $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ está proximo a $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ asi que el vector infinito $\hat{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N, 0, 0, \ldots) \in U$.

Demostración.

Veamos que T es transitivo convexo en $X^{(\infty)}$.

Sean U y V dos abiertos no vacios en $X^{(\infty)}$. Podemos elegir $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ e $y = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ en $X^{(\infty)}$ tal que $x_k = 0$ e $y_k = 0$ $\forall k \geq N$ con $x \in U$ e $y \in V$.

Puesto que S_N tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos en $X^{(N)}$, existe un vector $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N) \in X^{(N)}$ tal que u es un vector ciclico convexo para S_N y $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ está proximo a $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ asi que el vector infinito $\hat{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N, 0, 0, \ldots) \in U$.

Puesto que S_N es ciclico convexo , existe un polinomio p convexo tal que $p(S_N)(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ está tan cerca de $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ tal que $p(T)\hat{u} \in V$.

□

Teorema

Sea T un operador normal diagonalizable en un espacio de Hilbert separable (real o complejo) con autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$.
(a) Si el espacio de Hilbert es complejo, entonces T es ciclico convexo si y solo si los autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ son distintos $\forall k \geq 1$, $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$.
(b) Si el espacio de Hilbert es real, entonces T es ciclico convexo si y solo si los autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ son distintos $\forall k \geq 1$, y $\lambda_k < -1$.

Por el teorema espectral, asumamos que $T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ es una matriz diagonal actuando sobre $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ y let $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base canónica.

Por el teorema espectral, asumamos que $T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ es una matriz diagonal actuando sobre $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ y let $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base canónica.

(a) Si T es ciclico convexo con vector ciclico convexo $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, entonces $\forall k \geq 1$ tenemos que

$$\infty = \sup_{n \geq 1} Re(\langle T^n x, e_k \rangle) = \sup_{n \geq 1} Re(\lambda_k^n x_k).$$

Por el teorema espectral, asumamos que $T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ es una matriz diagonal actuando sobre $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ y let $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base canónica.

(a) Si T es ciclico convexo con vector ciclico convexo $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, entonces $\forall k \geq 1$ tenemos que

$$\infty = \sup_{n \geq 1} Re(\langle T^n x, e_k \rangle) = \sup_{n \geq 1} Re(\lambda_k^n x_k).$$

Esto implica que $x_k \neq 0$ y que $|\lambda_k| > 1$ para cada $k \geq 1$ y distintos.

Por el teorema espectral, asumamos que $T = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ es una matriz diagonal actuando sobre $\ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$ y let $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ la base canónica.

(a) Si T es ciclico convexo con vector ciclico convexo $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{N})$, entonces $\forall k \geq 1$ tenemos que

$$\infty = \sup_{n\geq 1} Re(\langle T^n x, e_k\rangle) = \sup_{n\geq 1} Re(\lambda_k^n x_k).$$

Esto implica que $x_k \neq 0$ y que $|\lambda_k| > 1$ para cada $k \geq 1$ y distintos.

$$\infty = \sup_{n\geq 1} Re\left(\langle T^n x, \frac{-i}{\overline{x_k}} e_k\rangle\right) = \sup_{n\geq 1} Re\left(\lambda_k^n x_k \frac{i}{x_k}\right) = \sup_{n\geq 1} Re(i\lambda_k^n)\,.$$

Por tanto $Im(\lambda_k) \neq 0$, $\forall k \geq 1$.

Inversamente supongamos que $\forall k \geq 1$ tenemos que $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$.

Inversamente supongamos que $\forall k \geq 1$ tenemos que $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$.

Entonces $\forall n \geq 1$, sea $T_n := diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la matriz diagonal sobre $\mathbb{C}^n$ donde λ_k es la k^{th} entrada diagonal.

Inversamente supongamos que $\forall k \geq 1$ tenemos que $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$.

Entonces $\forall n \geq 1$, sea $T_n := diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la matriz diagonal sobre $\mathbb{C}^n$ donde λ_k es la k^{th} entrada diagonal. Puesto que los autovalores

$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ son distintos y $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$, Por Rezai T_n es ciclico convexo en $\mathbb{C}^n$ y todo vector con todas la coordenadas no nulas es ciclico convexo para T_n.

Inversamente supongamos que $\forall k \geq 1$ tenemos que $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$.

Entonces $\forall n \geq 1$, sea $T_n := diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la matriz diagonal sobre $\mathbb{C}^n$ donde λ_k es la k^{th} entrada diagonal. Puesto que los autovalores

$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ son distintos y $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$, Por Rezai T_n es ciclico convexo en $\mathbb{C}^n$ y todo vector con todas la coordenadas no nulas es ciclico convexo para T_n.

Por tanto T_n tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos en $\mathbb{C}^n$ $\forall n \geq 1$.

Inversamente supongamos que $\forall k \geq 1$ tenemos que $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$.

Entonces $\forall n \geq 1$, sea $T_n := diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ la matriz diagonal sobre $\mathbb{C}^n$ donde λ_k es la k^{th} entrada diagonal. Puesto que los autovalores

$\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ son distintos y $|\lambda_k| > 1$ y $Im(\lambda_k) \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$, Por Rezai T_n es ciclico convexo en $\mathbb{C}^n$ y todo vector con todas la coordenadas no nulas es ciclico convexo para T_n.

Por tanto T_n tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos en $\mathbb{C}^n$ $\forall n \geq 1$.

Por tanto T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos

Teorema

Sea $S := \{re^{i\theta} : r > 1 \text{ and } 0 < |\theta| < \pi\} = \mathbb{C} \setminus (\overline{\mathbb{D}} \cup \mathbb{R})$*. Supongamos* T *es un operador lineal y acotado en un espacio de Banach complejo* X *y que* T *tiene un conjunto numerable de autovectores linealmente independientes cuyas combinaciones lineales finitas son densas en* X *tal que los correspondientes autovalores son distintos y estan contenidos en* S*. Entonces* T *es ciclico convexo y tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos.*

Supongamos que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto numerable de autovectores linealmente independientes cuyas combinaciones lineales finitas son densas en X tal que los correspondientes autovalores $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ son distintos y estan contenidos en S y $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 < \infty$.

Supongamos que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto numerable de autovectores linealmente independientes cuyas combinaciones lineales finitas son densas en X tal que los correspondientes autovalores $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ son distintos y estan contenidos en S y $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 < \infty$.

Sea D la matriz diagonal en $\ell^2(\mathbb{N})$ cuya n^{th} entrada diagonal es λ_n. Definamos $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to X$ by $A(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$.

$$\|A(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \right\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 \right)^{1/2} = C \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|$$

Supongamos que $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto numerable de autovectores linealmente independientes cuyas combinaciones lineales finitas son densas en X tal que los correspondientes autovalores $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ son distintos y estan contenidos en S y $\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 < \infty$.

Sea D la matriz diagonal en $\ell^2(\mathbb{N})$ cuya n^{th} entrada diagonal es λ_n. Definamos $A : \ell^2(\mathbb{N}) \to X$ by $A(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n$.

$$\|A(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n \right\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|v_n\|^2 \right)^{1/2} = C \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|$$

Tenemos que A tiene rango denso y $TA = AD$ por tanto T es ciclico convexo y tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos.

Corolario

Sea G un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ *con componentes* $\{G_n\}_{n\in J}$, $\mathscr{H}$ *un espacio de Hilbert de funciones analíticas con nucleo reproductor sobre G y* φ *un multiplicador de* $\mathscr{H}$*. Si* φ *es no constante sobre todas las componentes de G y* $\varphi(G_n)\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}\neq\emptyset$ *para todo* $n\in J$*, entonces* M_φ^* *es ciclico convexo en* $\mathscr{H}$ *y tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos.*

Veamos que las combinaciones lineales finitas de los autovectores de M_φ^* con autovalores en $S = \mathbb{C} \setminus (\overline{\mathbb{D}} \cup \mathbb{R})$ son densas en $\mathscr{H}$.

Veamos que las combinaciones lineales finitas de los autovectores de M_φ^* con autovalores en $S = \mathbb{C} \setminus (\overline{\mathbb{D}} \cup \mathbb{R})$ son densas en $\mathscr{H}$.

Si $\lambda \in G$ y K_λ es el nucleo reproductor para $\mathscr{H}$ en el punto $\lambda \in G$ entonces

$$M_\varphi^* K_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} K_\lambda$$

Veamos que las combinaciones lineales finitas de los autovectores de M_φ^* con autovalores en $S = \mathbb{C} \setminus (\overline{\mathbb{D}} \cup \mathbb{R})$ son densas en $\mathscr{H}$.

Si $\lambda \in G$ y K_λ es el nucleo reproductor para $\mathscr{H}$ en el punto $\lambda \in G$ entonces

$$M_\varphi^* K_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} K_\lambda$$

Para toda componente G_n of G, φ es no constante en G_n, por tanto $\{\lambda \in G_n : |\varphi(\lambda)| > 1\}$ es un subconjunto abierto de G_n y φ no aplica $\{\lambda \in G_n : |\varphi(\lambda)| > 1\}$ en $\mathbb{R}$.
Luego $\forall n \in J$, $E_n = \{\lambda \in G_n : |\varphi(\lambda)| > 1$ y $\varphi(\lambda) \notin \mathbb{R}\}$ es un subconjunto abierto de G_n. Sea $E := \bigcup_{n \in J} E_n$.

Veamos que las combinaciones lineales finitas de los autovectores de M_φ^* con autovalores en $S = \mathbb{C} \setminus (\overline{\mathbb{D}} \cup \mathbb{R})$ son densas en $\mathscr{H}$.

Si $\lambda \in G$ y K_λ es el nucleo reproductor para $\mathscr{H}$ en el punto $\lambda \in G$ entonces

$$M_\varphi^* K_\lambda = \overline{\varphi(\lambda)} K_\lambda$$

Para toda componente G_n of G, φ es no constante en G_n, por tanto $\{\lambda \in G_n : |\varphi(\lambda)| > 1\}$ es un subconjunto abierto de G_n y φ no aplica $\{\lambda \in G_n : |\varphi(\lambda)| > 1\}$ en $\mathbb{R}$.
Luego $\forall n \in J$, $E_n = \{\lambda \in G_n : |\varphi(\lambda)| > 1 \text{ y } \varphi(\lambda) \notin \mathbb{R}\}$ es un subconjunto abierto de G_n. Sea $E := \bigcup_{n \in J} E_n$.

$\forall \lambda \in E$, K_λ es un autovector para M_φ^* con autovalor $\overline{\varphi(\lambda)}$ que yace en $S = \mathbb{C} \setminus (\overline{\mathbb{D}} \cup \mathbb{R})$.

Veamos que las combinaciones lineales finitas de los autovectores de M_φ^* con autovalores en $S=\mathbb{C}\setminus(\overline{\mathbb{D}}\cup\mathbb{R})$ son densas en $\mathscr{H}$.

Si $\lambda\in G$ y K_λ es el nucleo reproductor para $\mathscr{H}$ en el punto $\lambda\in G$ entonces

$$M_\varphi^* K_\lambda=\overline{\varphi(\lambda)}K_\lambda$$

Para toda componente G_n of G, φ es no constante en G_n, por tanto $\{\lambda\in G_n:|\varphi(\lambda)|>1\}$ es un subconjunto abierto de G_n y φ no aplica $\{\lambda\in G_n:|\varphi(\lambda)|>1\}$ en $\mathbb{R}$.
Luego $\forall n\in J$, $E_n=\{\lambda\in G_n:|\varphi(\lambda)|>1 \text{ y } \varphi(\lambda)\notin\mathbb{R}\}$ es un subconjunto abierto de G_n. Sea $E:=\bigcup_{n\in J}E_n$.

$\forall\lambda\in E$, K_λ es un autovector para M_φ^* con autovalor $\overline{\varphi(\lambda)}$ que yace en $S=\mathbb{C}\setminus(\overline{\mathbb{D}}\cup\mathbb{R})$.

Puesto que $E\cap G_n$ es un abierto no vacio $\forall\in J$, entonces las combinaciones lineales finitas de $\{K_\lambda:\lambda\in E\}$ son densas en $\mathscr{H}$.

Puesto que φ es no constante en E_n para cada $n \in J$, podemos elegir un conjunto numerable $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ en E_n que tiene un punto de acumulación en E_n y φ es inyectiva sobre $\{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Puesto que φ es no constante en E_n para cada $n \in J$, podemos elegir un conjunto numerable $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ en E_n que tiene un punto de acumulación en E_n y φ es inyectiva sobre $\{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Entonces $\{K_{\lambda_{n,k}}\}_{n,k=1}^{\infty}$ es un conjunto numerable de autovectores linealmente independientes cuyo combinaciones lineales finitas son densas en $\mathscr{H}$ tal que los correspondientes autovalores son distintos y estan contenidos en S.

Puesto que φ es no constante en E_n para cada $n \in J$, podemos elegir un conjunto numerable $\{\lambda_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ en E_n que tiene un punto de acumulación en E_n y φ es inyectiva sobre $\{\lambda_{n,k}\}_{n,k=1}^{\infty}$.

Entonces $\{K_{\lambda_{n,k}}\}_{n,k=1}^{\infty}$ es un conjunto numerable de autovectores linealmente independientes cuyo combinaciones lineales finitas son densas en $\mathscr{H}$ tal que los correspondientes autovalores son distintos y estan contenidos en S.

Por tanto M_{φ}^{*} es ciclico convexo en $\mathscr{H}$ y tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos.

Example

Sea M^*_{2+z} en $H^2(\mathbb{D})$.

M^*_{2+z} no es 1-weakly-hypercyclic (Skharin)

M^*_{2+z} es ciclico convexo.

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos?

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos?

Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ es cierto.

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos?

Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ es cierto.

Si T es un operador diagonal en un espacio de Hilbert también

Cuestiones

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos?

Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ es cierto.

Si T es un operador diagonal en un espacio de Hilbert también

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces $(-1)T$ es ciclico convexo?

Cuestiones

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos?

Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ es cierto.

Si T es un operador diagonal en un espacio de Hilbert también

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces $(-1)T$ es ciclico convexo?

Si T^2 es ciclico convexo es cierto

Cuestiones

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces T tiene un conjunto denso de vectores ciclico convexos?

Si $\sigma_p(T^*) = \emptyset$ es cierto.

Si T es un operador diagonal en un espacio de Hilbert también

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces $(-1)T$ es ciclico convexo?

Si T^2 es ciclico convexo es cierto

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces, como de grande puede ser el espectro puntual de T^*? Puede tener interior no vacio?

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces, como de grande puede ser el espectro puntual de T^*? Puede tener interior no vacio?

Si T^n es ciclico convexo $\forall n$, el espectro puntual de T^* tiene interior vacio.

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces, como de grande puede ser el espectro puntual de T^*? Puede tener interior no vacio?

Si T^n es ciclico convexo $\forall n$, el espectro puntual de T^* tiene interior vacio.

Cuestión

Dado un espacio de Banach separable X, existe un operador ciclico convexo S en X tal que S^2 no lo es?

Cuestión

Si T es ciclico convexo entonces, como de grande puede ser el espectro puntual de T^*? Puede tener interior no vacio?

Si T^n es ciclico convexo $\forall n$, el espectro puntual de T^* tiene interior vacio.

Cuestión

Dado un espacio de Banach separable X, existe un operador ciclico convexo S en X tal que S^2 no lo es?