Normas de Orlicz en espacios de funciones integrables

Sebastián Lajara

Departamento de Matemáticas
Universidad de Castilla-La Mancha

Universidad Politécnica de Valencia
21 de noviembre de 2013

Definición (Espacios de funciones de Lebesgue-Bochner)

X espacio de Banach real, con norma $\|\cdot\|$, (Ω, μ) espacio de probabilidad, $p \in [1, \infty)$.

Definición (Espacios de funciones de Lebesgue-Bochner)

X espacio de Banach real, con norma $\|\cdot\|$, (Ω, μ) espacio de probabilidad, $p \in [1, \infty)$.

$$L^p(\mu, X) = \text{funciones medibles } f : \Omega \to X \text{ tales que}$$

$$\|f\|_{L^p(\mu,X)} := \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Definición (Espacios de funciones de Lebesgue-Bochner)

X espacio de Banach real, con norma $\|\cdot\|$, (Ω, μ) espacio de probabilidad, $p \in [1, \infty)$.

$$L^p(\mu, X) = \text{funciones medibles } f : \Omega \to X \text{ tales que}$$

$$\|f\|_{L^p(\mu,X)} := \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Problema

Si X tiene una propiedad geométrica $\mathcal{P}$, determinar si el espacio $L^p(\mu, X)$ tiene también la propiedad $\mathcal{P}$.

Teorema (Leonard & Sundaresan, 1974)

Si $p > 1$ y la norma de X es Gâteaux (Fréchet, uniformemente Fréchet) diferenciable, también lo es la norma del espacio $L^p(\mu, X)$.

Teorema (Leonard & Sundaresan, 1974)

Si $p > 1$ y la norma de X es Gâteaux (Fréchet, uniformemente Fréchet) diferenciable, también lo es la norma del espacio $L^p(\mu, X)$.

Teorema (Smith & Turett, 1980)

Si $p > 1$ y la norma de X es estrictamente convexa (localmente uniformemente convexa, uniformemente convexa, uniformemente convexa en cada dirección), también lo es la norma de $L^p(\mu, X)$.

Teorema (Leonard & Sundaresan, 1974)

Si $p > 1$ y la norma de X es Gâteaux (Fréchet, uniformemente Fréchet) diferenciable, también lo es la norma del espacio $L^p(\mu, X)$.

Teorema (Smith & Turett, 1980)

Si $p > 1$ y la norma de X es estrictamente convexa (localmente uniformemente convexa, uniformemente convexa, uniformemente convexa en cada dirección), también lo es la norma de $L^p(\mu, X)$.

Nota

La norma del espacio $L^1(\mu)$ no es Gâteaux diferenciable ni estrictamente convexa.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Gâteaux diferenciable (G) si para cada $x \in S_X$ existe un único $f_x \in X^*$ (la derivada de $\|\cdot\|$ en x) tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + th\| - 1}{t} = f_x(h) \quad \text{para cada} \quad h \in X.$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Gâteaux diferenciable (G) si para cada $x \in S_X$ existe un único $f_x \in X^*$ (la derivada de $\|\cdot\|$ en x) tal que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + th\| - 1}{t} = f_x(h) \quad \text{para cada} \quad h \in X.$$

- Fréchet diferenciable (F) si $\|\cdot\|$ es Gâteaux y

$$\lim_{t \to 0} \sup \left\{ \left| \frac{\|x + th\| - 1}{t} - f_x(h) \right| : \; h \in B_X \right\} = 0.$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Gâteaux diferenciable (G) si para cada $x \in S_X$ existe un único $f_x \in X^*$ (la derivada de $\|\cdot\|$ en x) tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\|-1}{t} = f_x(h) \quad \text{para cada} \quad h \in X.$$

- Fréchet diferenciable (F) si $\|\cdot\|$ es Gâteaux y

$$\lim_{t\to 0} \sup\left\{\left|\frac{\|x+th\|-1}{t} - f_x(h)\right| : \ h \in B_X\right\} = 0.$$

- Uniformemente Gâteaux diferenciable (UG) si $\|\cdot\|$ es Gâteaux

$$\lim_{t\to 0} \sup\left\{\left|\frac{\|x+th\|-1}{t} - f_x(h)\right| : \ x \in S_X\right\} = 0, \quad \text{para cada} \quad h \in S_X$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Gâteaux diferenciable (G) si para cada $x \in S_X$ existe un único $f_x \in X^*$ (la derivada de $\|\cdot\|$ en x) tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|x+th\|-1}{t} = f_x(h) \quad \text{para cada} \quad h \in X.$$

- Fréchet diferenciable (F) si $\|\cdot\|$ es Gâteaux y

$$\lim_{t\to 0} \sup\left\{\left|\frac{\|x+th\|-1}{t} - f_x(h)\right| : \ h \in B_X\right\} = 0.$$

- Uniformemente Gâteaux diferenciable (UG) si $\|\cdot\|$ es Gâteaux

$$\lim_{t\to 0} \sup\left\{\left|\frac{\|x+th\|-1}{t} - f_x(h)\right| : \ x \in S_X\right\} = 0, \ \text{para cada} \ h \in S_X$$

- Uniformemente Fréchet diferenciable (UF) si $\|\cdot\|$ es Gâteaux y

$$\lim_{t\to 0} \sup\left\{\left|\frac{\|x+th\|-1}{t} - f_x(h)\right| : \ (x,h) \in S_X \times S_X\right\} = 0.$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Estrictamente convexa, o rotunda (R), si

$$x, y \in S_X, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x+y\| < 2.$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Estrictamente convexa, o rotunda (R), si

$$x, y \in S_X, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x+y\| < 2.$$

- Uniformemente convexa, o uniformemente rotunda (UR), si

$$x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Estrictamente convexa, o rotunda (R), si

$$x, y \in S_X, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x+y\| < 2.$$

- Uniformemente convexa, o uniformemente rotunda (UR), si

$$x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - y_n\| \to 0.$$

- Uniformemente convexa en cada dirección (URED) si

$$\left.\begin{array}{l} x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \\ x_n - y_n = \mathbb{R}z \ \text{ para algún } \ z \in X \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real. Se dice que $\|\cdot\|$ es:

- Estrictamente convexa, o rotunda (R), si

$$x, y \in S_X, \quad x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|x+y\| < 2.$$

- Uniformemente convexa, o uniformemente rotunda (UR), si

$$x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - y_n\| \to 0.$$

- Uniformemente convexa en cada dirección (URED) si

$$\left.\begin{array}{l} x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \\ x_n - y_n = \mathbb{R}z \;\text{ para algún }\; z \in X \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \|x_n - y_n\| \to 0.$$

- Localmente uniformemente convexa (LUR) si

$$x_n, x \in S_X, \quad \|x_n + x\| \to 2 \quad \Rightarrow \quad \|x_n - x\| \to 0.$$

Teorema (Smulyan)

- X^* es R $\Rightarrow$ X es G.

Teorema (Smulyan)

- X^* es R $\Rightarrow$ X es G.
- X^* es LUR $\Rightarrow$ X es F.

Teorema (Smulyan)

- X^* es R $\Rightarrow$ X es G.
- X^* es LUR $\Rightarrow$ X es F.
- X^* es UR si (y sólo si) X es UF.

Teorema

- (Amir & Lindenstrauss, 1968) Si X es WCG entonces X^* admite equivalente dual R.

Teorema (Smulyan)

- X^* es R $\Rightarrow$ X es G.
- X^* es LUR $\Rightarrow$ X es F.
- X^* es UR si (y sólo si) X es UF.

Teorema

- (Amir & Lindenstrauss, 1968) Si X es WCG entonces X^* admite equivalente dual R.
- (Troyanski, 1971) Si X es WCG entonces X admite norma equivalente LUR.

Teorema (Smulyan)

- X^* es R $\Rightarrow$ X es G.
- X^* es LUR $\Rightarrow$ X es F.
- X^* es UR si (y sólo si) X es UF.

Teorema

- (Amir & Lindenstrauss, 1968) Si X es WCG entonces X^* admite equivalente dual R.
- (Troyanski, 1971) Si X es WCG entonces X admite norma equivalente LUR.
- (Ekeland & Lebourg, 1975) Si X es F, entonces X es Asplund.

Teorema (Smulyan)

- X^* es R $\Rightarrow$ X es G.
- X^* es LUR $\Rightarrow$ X es F.
- X^* es UR si (y sólo si) X es UF.

Teorema

- (Amir & Lindenstrauss, 1968) Si X es WCG entonces X^* admite equivalente dual R.
- (Troyanski, 1971) Si X es WCG entonces X admite norma equivalente LUR.
- (Ekeland & Lebourg, 1975) Si X es F, entonces X es Asplund.
- (Enflo, 1972 - Pisier, 1975) X es super-reflexivo sii X admite norma equivalente UF (UR).

Teorema (Smulyan)

- X^* es R $\Rightarrow$ X es G.
- X^* es LUR $\Rightarrow$ X es F.
- X^* es UR si (y sólo si) X es UF.

Teorema

- (Amir & Lindenstrauss, 1968) Si X es WCG entonces X^* admite equivalente dual R.
- (Troyanski, 1971) Si X es WCG entonces X admite norma equivalente LUR.
- (Ekeland & Lebourg, 1975) Si X es F, entonces X es Asplund.
- (Enflo, 1972 - Pisier, 1975) X es super-reflexivo sii X admite norma equivalente UF (UR).
- (Fabian, Godefroy & Zizler, 2001) X es UG renormable sii X es un subespacio de un espacio Hilbert-generado.

Proposición

$L^1(\mu)$ admite una norma equivalente LUR, una norma equivalente URED y una norma equivalente UG.

Proposición

$L^1(\mu)$ admite una norma equivalente LUR, una norma equivalente URED y una norma equivalente UG.

Teorema (Fabian & Lajara, 2012)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea μ una medida de probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es G entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente G.

Diferenciabilidad Gâteaux

Proposición

$L^1(\mu)$ admite una norma equivalente LUR, una norma equivalente URED y una norma equivalente UG.

Teorema (Fabian & Lajara, 2012)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea μ una medida de probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es G entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente G.
2. Si $\|\cdot\|$ es UG entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente UG.

Diferenciabilidad Fréchet

Proposición

El espacio $L^1([0,1])$ no admite ninguna norma equivalente F.

Diferenciabilidad Fréchet

Proposición

El espacio $L^1([0,1])$ no admite ninguna norma equivalente F.

Teorema (Fabian & Lajara, 2012)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea μ una medida de probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es F entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente cuya restricción a cada subespacio reflexivo es F.

Diferenciabilidad Fréchet

Proposición

El espacio $L^1([0,1])$ no admite ninguna norma equivalente F.

Teorema (Fabian & Lajara, 2012)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y sea μ una medida de probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es F entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente cuya restricción a cada subespacio reflexivo es F.
2. Si $\|\cdot\|$ es UF entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente cuya restricción a cada subespacio reflexivo es UF.

Corolario (Versión vectorial de un teorema de Roshental)

Si X es super-reflexivo entonces cualquier subespacio reflexivo de $L^1(\mu, X)$ es super-reflexivo.

Teorema (Schluchtermann, 1991)

Si μ es una medida de probabilidad y X es una espacio con norma LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente LUR.

Convexidad

Teorema (Schluchtermann, 1991)

Si μ es una medida de probabilidad y X es una espacio con norma LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente LUR.

Teorema (Fabian & Lajara, 2013)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y μ una m. probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es R, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente R.

Convexidad

Teorema (Schluchtermann, 1991)

Si μ es una medida de probabilidad y X es una espacio con norma LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente LUR.

Teorema (Fabian & Lajara, 2013)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y μ una m. probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es R, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente R.
2. Si $\|\cdot\|$ es LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente LUR.

Convexidad

Teorema (Schluchtermann, 1991)

Si μ es una medida de probabilidad y X es una espacio con norma LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente LUR.

Teorema (Fabian & Lajara, 2013)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y μ una m. probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es R, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente R.
2. Si $\|\cdot\|$ es LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente LUR.
3. Si $\|\cdot\|$ es URED, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente URED.

Convexidad

Teorema (Schluchtermann, 1991)

Si μ es una medida de probabilidad y X es una espacio con norma LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente LUR.

Teorema (Fabian & Lajara, 2013)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, y μ una m. probabilidad.

1. Si $\|\cdot\|$ es R, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente R.
2. Si $\|\cdot\|$ es LUR, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente LUR.
3. Si $\|\cdot\|$ es URED, entonces $L^1(\mu, X)$ admite norma equivalente URED.

Teorema (Fabian & Lajara, 2013)

Si $(X, \|\cdot\|)$ es UR entonces $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente cuya restricción a cada subespacio reflexivo es UR.

Construcción de la norma

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;

Construcción de la norma

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;
- M es (estrictamente) creciente en $[0, \infty)$, y

Construcción de la norma

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;
- M es (estrictamente) creciente en $[0, \infty)$, y
- $\lim_{t \to \infty} M(t) = \infty$.

Construcción de la norma

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;
- M es (estrictamente) creciente en $[0, \infty)$, y
- $\lim_{t \to \infty} M(t) = \infty$.

Además asumimos que:

- $M(t) \neq 0$ si $t \neq 0$;

Construcción de la norma

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;
- M es (estrictamente) creciente en $[0, \infty)$, y
- $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$.

Además asumimos que:

- $M(t) \neq 0$ si $t \neq 0$;
- M es dos veces derivable,

Construcción de la norma

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;
- M es (estrictamente) creciente en $[0, \infty)$, y
- $\lim_{t \to \infty} M(t) = \infty$.

Además asumimos que:

- $M(t) \neq 0$ si $t \neq 0$;
- M es dos veces derivable,
- Las funciones M, M' y $N(t) = tM'(t)$ son lipschitzianas en $\mathbb{R}$, y

Construcción de la norma

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;
- M es (estrictamente) creciente en $[0, \infty)$, y
- $\lim_{t \to \infty} M(t) = \infty$.

Además asumimos que:

- $M(t) \neq 0$ si $t \neq 0$;
- M es dos veces derivable,
- Las funciones M, M' y $N(t) = tM'(t)$ son lipschitzianas en $\mathbb{R}$, y
- $\lim_{t \to \infty} t^2 M(t) \in (0, \infty)$.

Sea $M : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ una función de Orlicz function:

- M es convexa, par, y satisface $M(0) = 0$;
- M es (estrictamente) creciente en $[0, \infty)$, y
- $\lim\limits_{t \to \infty} M(t) = \infty$.

Además asumimos que:

- $M(t) \neq 0$ si $t \neq 0$;
- M es dos veces derivable,
- Las funciones M, M' y $N(t) = tM'(t)$ son lipschitzianas en $\mathbb{R}$, y
- $\lim\limits_{t \to \infty} t^2 M(t) \in (0, \infty)$.

Ejemplo

$$M(t) = \int_0^{|t|} \arctan(s) \mathrm{d}s, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notation

$$\varphi(f) := \int_\Omega M\left(\|f(\omega)\|\right) \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^1(\mu, X).$$

Notation

$$\varphi(f) := \int_\Omega M\left(\|f(\omega)\|\right) \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^1(\mu, X).$$

- φ es simétrica, convexa, y satisface $\varphi(0) = 0$;

Notation

$$\varphi(f) := \int_\Omega M\left(\|f(\omega)\|\right) \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^1(\mu, X).$$

- φ es simétrica, convexa, y satisface $\varphi(0) = 0$;
- φ es Lipschitiziana.

Notation

$$\varphi(f) := \int_\Omega M(\|f(\omega)\|)\, \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^1(\mu, X).$$

- φ es simétrica, convexa, y satisface $\varphi(0) = 0$;
- φ es Lipschitiziana.
- El conjunto

$$B := \{f \in L^1(\mu, X) : \ \varphi(f) \leq 1\}$$

es simétrico, convexo y cerrado.

Notation

$$\varphi(f) := \int_\Omega M\left(\|f(\omega)\|\right) \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^1(\mu, X).$$

- φ es simétrica, convexa, y satisface $\varphi(0) = 0$;
- φ es Lipschitiziana.
- El conjunto

$$B := \left\{ f \in L^1(\mu, X) : \ \varphi(f) \leq 1 \right\}$$

es simétrico, convexo y cerrado.

Notation

$$|||f||| := \inf \left\{ \varrho > 0 : \ \varphi\left(f/\varrho\right) \leq 1 \right\}, \quad f \in L^1(\mu, X).$$

Notation

$$\varphi(f) := \int_\Omega M\left(\|f(\omega)\|\right) \mathrm{d}\mu(\omega), \quad f \in L^1(\mu, X).$$

- φ es simétrica, convexa, y satisface $\varphi(0) = 0$;
- φ es Lipschitiziana.
- El conjunto

$$B := \left\{f \in L^1(\mu, X) : \ \varphi(f) \leq 1\right\}$$

es simétrico, convexo y cerrado.

Notation

$$|||f||| := \inf\left\{\varrho > 0 : \ \varphi\left(f/\varrho\right) \leq 1\right\}, \quad f \in L^1(\mu, X).$$

Lema

Las normas $||| \cdot |||$ y $\| \cdot \|_{L^1(\mu,X)}$ son equivalentes.

Proposición

Si $\|\cdot\|$ es G, entonces la función φ es Gâteaux diferenciable en $L^1(\mu, X)$, y para cualesquiera $f, h \in L^1(\mu, X)$ se tiene

$$\varphi'(f)(h) = \int_\Omega M'(\|f(\omega)\|)\|\cdot\|'(f(\omega))(h(\omega))\, d\mu(\omega).$$

Proposición

Si $\|\cdot\|$ es G, entonces la función φ es Gâteaux diferenciable en $L^1(\mu, X)$, y para cualesquiera $f, h \in L^1(\mu, X)$ se tiene

$$\varphi'(f)(h) = \int_\Omega M'(\|f(\omega)\|)\|\cdot\|'\,(f(\omega))\,(h(\omega))\,d\mu(\omega).$$

Convenio $\|\cdot\|'(0) = 0$.

Proposición

Si $\|\cdot\|$ es G, entonces la función φ es Gâteaux diferenciable en $L^1(\mu, X)$, y para cualesquiera $f, h \in L^1(\mu, X)$ se tiene

$$\varphi'(f)(h) = \int_\Omega M'(\|f(\omega)\|) \|\cdot\|' (f(\omega)) (h(\omega)) \, d\mu(\omega).$$

Convenio $\|\cdot\|'(0) = 0$.

1. Si $f \in L^1(\mu, X)$, entonces

$$|||f||| = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \int_\Omega M(\|f(\omega)\|) \, d\mu(\omega) = 1.$$

Proposición

Si $\|\cdot\|$ es G, entonces la función φ es Gâteaux diferenciable en $L^1(\mu, X)$, y para cualesquiera $f, h \in L^1(\mu, X)$ se tiene

$$\varphi'(f)(h) = \int_\Omega M'(\|f(\omega)\|) \|\cdot\|' (f(\omega)) (h(\omega)) \, d\mu(\omega).$$

Convenio $\|\cdot\|'(0) = 0$.

1. Si $f \in L^1(\mu, X)$, entonces

$$|||f||| = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad \int_\Omega M(\|f(\omega)\|) \, d\mu(\omega) = 1.$$

2. Para cualesquiera $a, b \geq 0$ se tiene

$$M(a) + M(b) - 2M\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{1}{4} M''(\max\{a, b\}) (a-b)^2.$$

Problemas abiertos

Definición

Se dice que un espacio de Banach X:

- Tiene la propiedad de Kadets si $(S_X, w) = (S_X, \|\cdot\|)$.

Definición

Se dice que un espacio de Banach X:

- Tiene la propiedad de Kadets si $(S_X, w) = (S_X, \|\cdot\|)$.
- Es uniformemente convexa, o uniformemente rotunda (UR), si

$$x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \quad \Rightarrow \quad x_n - y_n \to 0 \text{ débilmente.}$$

Problemas abiertos

Definición

Se dice que un espacio de Banach X:

- Tiene la propiedad de Kadets si $(S_X, w) = (S_X, \|\cdot\|)$.
- Es uniformemente convexa, o uniformemente rotunda (UR), si

$$x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \quad \Rightarrow \quad x_n - y_n \to 0 \text{ débilmente.}$$

Teorema

1. (Troyanski, 1985) X es LUR renormable si y sólo si X admite una norma equivalente R con la propiedad de Kadets.

Problemas abiertos

Definición

Se dice que un espacio de Banach X:

- Tiene la propiedad de Kadets si $(S_X, w) = (S_X, \|\cdot\|)$.
- Es uniformemente convexa, o uniformemente rotunda (UR), si

$$x_n, y_n \in S_X, \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \quad \Rightarrow \quad x_n - y_n \to 0 \text{ débilmente.}$$

Teorema

1. (Troyanski, 1985) X es LUR renormable si y sólo si X admite una norma equivalente R con la propiedad de Kadets.
2. (Hájek, 1995) Si X es wUR, entonces X es un espacio de Asplund.

Problema

Si X tiene la propiedad de Kadets, determinar si $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente con esta propiedad.

Problema

Si X tiene la propiedad de Kadets, determinar si $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente con esta propiedad.

Problema

Si X es wUR, determinar si $L^1(\mu, X)$ admite una norma equivalente cuya restricción a cada subespacio reflexivo es wUR.