Métrica afín de superfícies en $\mathbb{R}^4$.

Luis Sánchez
luisesan@icmc.usp

25 de abril de 2013

Resumen

Consideramos superfícies M afín-inmersas en $\mathbb{R}^4$.

- Métrica afín sobre M.
- Direciones asintóticas afín.
- Ecuación diferencial para las líneas asintóticas similar al caso Euclídeo.
- Métrica Blaschke vs métrica afín.
- Una nueva métrica.

Inmersión afín

Sea $(\mathbb{R}^4, D)$ el 4-espacio afín asociado con el 4-espacio euclídeo junto con la usual conexión afín D.

Definición

$f : M^2 \to \mathbb{R}^4$ una inmmersión diferenciable es llamada una **inmersión afín** si:

1. Existe un fibrado plano transversal σ sobre f, esto es en cualquier punto $x \in M$, $\sigma_x \subset T_{f(x)}\mathbb{R}^4$ tal que
$$T_{f(x)}(\mathbb{R}^4) = f_*(T_x(M)) + \sigma_x \text{ (suma directa)}$$
2. y tal que para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$
$$(D_X f_*(Y))_x = (f_*(\nabla_X Y))_x + (\alpha(X, Y))_x$$
donde $(\alpha(X, Y))_x \in \sigma_x$, en cualquier punto $x \in M$.

Métrica afín

La métrica afín fue introducida por Nomizu y Vrancken, 1993.

Sea M^2 una superfície afín-inmersa en $\mathbb{R}^4$, σ un fibrado plano transversal sobre M. Denotemos por ξ_1 y ξ_2 dos campos vectoriales locales que forman una base local de σ.

Para X, Y campos vectoriales tangentes a M tenemos:

$$D_X Y = \nabla_X Y + h^1(X,Y)\xi_1 + h^2(X,Y)\xi_2,$$

$$D_X \xi_1 = -S_1 X + \tau_1^1(X)\xi_1 + \tau_1^2(X)\xi_2$$

$$D_X \xi_2 = -S_2 X + \tau_2^1(X)\xi_1 + \tau_2^2(X)\xi_2$$

$\nabla = \nabla(\sigma)$ es una conexión afín libre de torsión, h^1, h^2 son formas bilineales simétricas, S_1, S_2 son $(1,1)$-campos tensoriales, y τ_i^j son 1-formas sobre M.

Sean $\overline{\xi}_1$ y $\overline{\xi}_2$ otros dos campos vectoriales que localmente generan otro plano transversal $\overline{\sigma}$.

$$\xi_1 = \phi\overline{\xi}_1 + \psi\overline{\xi}_2 + Z_1$$
$$\xi_2 = \rho\overline{\xi}_1 + \beta\overline{\xi}_2 + Z_2$$

donde: $\phi, \psi, \rho, \beta \in \mathcal{C}^\infty(M)$ verifican $\phi\beta - \psi\rho \neq 0$,
Z_1 y Z_2 son campos vectoriales tangentes.

Comparando las equaciones en los diferentes planos transversales,

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h^1(X,Y)Z_1 + h^2(X,Y)Z_2 \\
\overline{h}^1(X,Y) &= \phi h^1(X,Y) + \rho h^2(X,Y) \\
\overline{h}^2(X,Y) &= \psi h^1(X,Y) + \beta h^2(X,Y)
\end{aligned}$$

Formas volumen

Usando ξ_1 y ξ_2 se define una forma volumen ω sobre M

$$\omega(X, Y) = [X, Y, \xi_1, \xi_2].$$

También podemos asociar a las formas cuadráticas h^1 y h^2 formas volumen ω_{h^i}, $i = 1, 2$.

$$\omega_{h^i}(X, Y) = \sqrt{|H^i|}$$

donde:

$$H^i = \begin{vmatrix} h^i(X, X) & h^i(X, Y) \\ h^i(Y, X) & h^i(Y, Y) \end{vmatrix}$$

Sea $\mathfrak{u} = \{X_1, X_2\}$ frame local diferenciable en una vecindad U de $p \in M$. Se define una forma bilineal simétrica $G_{\mathfrak{u}}$

$$G_{\mathfrak{u}}(Y, Z) = \frac{1}{2}([X_1, X_2, D_Y X_1, D_Z X_2] + [X_1, X_2, D_Z X_1, D_Y X_2]).$$

$G_{\mathfrak{u}}$ es independiente de la elección del fibrado plano transversal.

Una superfície M es una **superfície no degenerada** si la forma bilineal simétrica $G_{\mathfrak{u}}$ es no degenerada.

Es provado en Nomizu y Vrancken, 1993 que $g_{\mathfrak{u}}$ dada por

$$g_{\mathfrak{u}}(Y,Z) = \frac{G_{\mathfrak{u}}(Y,Z)}{(det_{\mathfrak{u}} G_{\mathfrak{u}})^{\frac{1}{3}}} \quad \text{donde} \quad det_{\mathfrak{u}} h = \begin{vmatrix} h(X_1,X_1) & h(X_1,X_2) \\ h(X_1,X_2) & h(X_2,X_2) \end{vmatrix}$$

no depende de la elección del frame tangente $\mathfrak{u}$.

La **métrica afín** de una superfície en $\mathbb{R}^4$ es dada por

$$g(Y,Z) = g_{\mathfrak{u}}(Y,Z).$$

Ejemplo. Superfície en la forma de Monge

$$X(u,v) = (u, v, G(u,v), H(u,v)).$$

Considere el frame $\mathfrak{u} = \{X_u, X_v\}$ y fijemos el plano transversal σ generado por $\xi_1 = (0,0,1,0)$ y $\xi_2 = (0,0,0,1)$ entonces,

$$G_{\mathfrak{u}}(X_u, X_u) = G_{uu}H_{uv} - G_{uv}H_{uu}$$

$$G_{\mathfrak{u}}(X_u, X_v) = (G_{uu}H_{vv} - G_{vv}H_{uu})/2$$

$$G_{\mathfrak{u}}(X_v, X_v) = G_{uv}H_{vv} - G_{vv}H_{uv}.$$

Note que: $det_{\mathfrak{u}} G_{\mathfrak{u}} = \Delta$

donde:

$$det_{\mathfrak{u}} G_{\mathfrak{u}} = \begin{vmatrix} G_{uu}H_{uv} - G_{uv}H_{uu} & \frac{1}{2}(G_{uu}H_{vv} - G_{vv}H_{uu}) \\ \frac{1}{2}(G_{uu}H_{vv} - G_{vv}H_{uu}) & G_{uv}H_{vv} - G_{vv}H_{uv} \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} G_{uu} & 2G_{uv} & G_{vv} & 0 \\ H_{uu} & 2H_{uv} & H_{vv} & 0 \\ 0 & G_{uu} & 2G_{uv} & G_{vv} \\ 0 & H_{uu} & 2H_{uv} & H_{vv} \end{vmatrix}.$$

Con las definiciones dadas por Mochida, Romero-Fuster y Ruas, 1995 la métrica afín es:

- definida positiva (o negativa) en puntos elípticos,
- indefinida en puntos hiperbólicos y
- degenerada en puntos parabólicos.

Teorema [A]

Teorema

(Nomizu y Vrancken, 1993) Sea M una superfície no degenerada en $\mathbb{R}^4$ con métrica afín g. Sea $\mathfrak{u} = \{X_1, X_2\}$ frame local tangente ortonormal y sea σ un arbitrario fibrado plano transversal. Entonces existe una única base local $\{\xi_1, \xi_2\}$ de σ tal que,

$$[X_1, X_2, \xi_1, \xi_2] = 1$$

$$h^1(X_1, X_1) = 1 \qquad h^1(X_1, X_2) = 0 \qquad h^1(X_2, X_2) = -\varepsilon$$

$$h^2(X_1, X_1) = 0 \qquad h^2(X_1, X_2) = 1 \qquad h^2(X_2, X_2) = 0$$

donde $\varepsilon = 1$ si la métrica afín es definida positiva y $\varepsilon = -1$ si la métrica es indefinida.

Métrica sobre un plano transversal

Sea $\mathfrak{u} = \{X_1, X_2\}$ un frame ortonormal y sea σ un fibrado plano transversal, denotamos por ξ_1 y ξ_2 los correspondientes campos vectoriales transversales obtenidos por teorema [A].

Una forma bilinear simétrica $g_{\mathfrak{u}}^{\perp}$ es definida escribiendo

$$\begin{aligned} g_{\mathfrak{u}}^{\perp}(\xi_1, \xi_1) &= \varepsilon \\ g_{\mathfrak{u}}^{\perp}(\xi_1, \xi_2) &= 0 \\ g_{\mathfrak{u}}^{\perp}(\xi_2, \xi_2) &= 1. \end{aligned}$$

$g_{\mathfrak{u}}^{\perp}$ es independiente de la elección del frame $\mathfrak{u}$.

Con esto obtenemos la métrica $g^{\perp}$ sobre el plano transversal σ.

Definición

Se dice que un fibrado plano transversal σ es equiafín si la conexión $\nabla = \nabla(\sigma)$ satisface $\nabla\omega_g = 0$, donde ω_g es la forma volumen para la métrica afín g.

Lema

Para cualquier $p \in M$ existe un fibrado plano transversal equiafín σ definido sobre una vecindad U de p.

Sea σ un arbitrario fibrado plano transversal equiafín y defina

$$\nabla^{\perp}g^{\perp}(X,\xi,\eta)=X(g^{\perp}(\xi,\eta))-g^{\perp}(\nabla^{\perp}_{X}\xi,\eta)-g^{\perp}(\xi,\nabla^{\perp}_{X}\eta),$$

donde $\nabla^{\perp}_{X}\xi$ es obtenido como la σ-componente de $D_X\xi$.

Definición

Sea $\mathfrak{u}=\{X_1,X_2\}$ un frame ortonormal local sobre M. Denote por ξ_1 y ξ_2 los correspondientes campos vetoriales que generan σ obtenidos por el teorema $[A]$.

Se dice que $\nabla^{\perp}g^{\perp}$ es $\mathfrak{u}$-**simétrico** si

$$\begin{aligned}(\nabla^{\perp}g^{\perp})(X_1,\xi_2,\xi_1) &= (\nabla^{\perp}g^{\perp})(X_2,\xi_1,\xi_1)\\ (\nabla^{\perp}g^{\perp})(X_2,\xi_1,\xi_2) &= (\nabla^{\perp}g^{\perp})(X_1,\xi_2,\xi_2)\end{aligned}$$

$\nabla^{\perp}g^{\perp}$ es **simétrico** si $\nabla^{\perp}g^{\perp}$ es $\mathfrak{u}$-simétrico para algún $\mathfrak{u}$.

Teorema

Sea M una superfície no degenerada en $\mathbb{R}^4$. Entonces existe un único fibrado plano transversal equiafín σ sobre M tal que $\nabla^{\perp} g^{\perp}$ es $\mathfrak{u}$-simétrica.

Como el fibrado plano transversal equiafín σ es único, es llamado de **fibrado plano normal afín**.

Una condición equivalente a la $\mathfrak{u}$-simetría es que $C_1 = C_2 = 0$ donde,

$$\begin{aligned} C_1 &= (\nabla g)(X_2, X_1, X_1) + (\nabla g)(X_1, X_2, X_1) \\ C_2 &= (\nabla g)(X_1, X_2, X_2) + (\nabla g)(X_2, X_1, X_2) \end{aligned}$$

Ejemplo. El producto de dos curvas planas

Sea $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u))$ y $\beta(v) = (\beta_1(v), \beta_2(v))$ dos curvas planas no degeneradas parametrizadas por longitud de arco afín, i.e. $[\alpha', \alpha''] = 1$ y $[\beta', \beta''] = 1$.

Ahora consideremos la inmersión definida por

$$X(u, v) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \beta_1(v), \beta_2(v))$$

Consideremos el frame $\mathfrak{u} = \{X_u, X_v\}$ y consideremos el fibrado plano transversal σ generado por $\{\eta_1, \eta_2\}$ con,

$$\eta_1 = X_{vv} \qquad \eta_2 = X_{uu}$$

haciendo los cálculos :

$$G_{\mathfrak{u}}(X_u, X_u) = 0 \qquad G_{\mathfrak{u}}(X_u, X_v) = -1/2 \qquad G_{\mathfrak{u}}(X_v, X_v) = 0$$

Sigue que el producto de curvas tiene métrica afín:

$$g(X_u, X_u) = 0 \qquad g(X_u, X_v) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad g(X_v, X_v) = 0.$$

No es difícil de probar que $\nabla g = 0$ y por tanto el plano generado por η_1 y η_2 es un plano normal afín.

Autovalores y autovectores generalizados

En Nuño Ballesteros y Romero-Fuster, 2010 demostraron que:

los autovalores de la segunda forma fundamental son las direcciones binormales y los autovectores son las direcciones asintóticas, estos resultados en el contexto euclídeo.

Sean A, B dos $n \times n$ matrices. Diremos que $(p, q) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ es un **autovalor generalizado** de (A, B) si

$$\det(pA + qB) = 0.$$

Analogamente, diremos que $x \in \mathbb{R}^n$ es un **autovector generalizado** asociado con el autovalor generalizado (p, q) si

$$(pA + qB)x = 0.$$

Líneas asintóticas afín

Sea M una superfície en $\mathbb{R}^4$, $X : U \to \mathbb{R}^4$ parametrización de M en torno de p.

Fijamos un frame tangente $\mathfrak{u} = \{X_1, X_2\}$ y un fibrado plano transversal σ. Sea $\{\xi_1, \xi_2\}$ una base local para σ.

Sean A y B las matrices asociadas con las formas bilineales simétricas h^1 y h^2.

Definición

Sea $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ un autovalor generalizado de (A, B) y $u = (u_1, u_2)$ un autovector generalizado asociado a (p, q). Definimos:

una **dirección asintótica afín** como $\quad u_1X_1 + u_2X_2 \in T_pM$

y una **binormal afín** como $\quad p\xi_1 + q\xi_2 \in \sigma_p$.

Definición

Un punto $p \in M$ es un **punto de inflexión afín** si $rA + sB = 0$ para algún $(r, s) \in \mathbb{R}^2 - 0$. Esto es , todas las direcciones $u_1X_1 + u_2X_2$ son direcciones asintóticas afín.

Las direcciones binormales afín no dependen de las coordenadas de M y las direcciones asintóticas afín no dependen de las coordenadas de M ni del fibrado plano transversal σ.

Ecuación diferencial para líneas asintóticas afín

Teorema

La ecuación diferencial de líneas asintóticas es:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dvdu & du^2 \\ a & b & c \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0.$$

donde (a, b, c) *son los coeficientes asociados a la forma bilineal* h^1 *y* (e, f, g) *son los coeficientes asociados a la forma bilineal* h^2.

Superfície en la forma de Monge

$$X(u,v) = (u, v, G(u,v), H(u,v)).$$

Considere el frame tangente $\mathfrak{u} = \{X_u, X_v\}$ y el fibrado plano transversal σ generado por $\xi_1 = (0,0,1,0)$, $\xi_2 = (0,0,0,1)$ las líneas asintóticas verifican la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} du^2 & -dudv & dv^2 \\ G_{uu} & G_{uv} & G_{vv} \\ H_{uu} & H_{uv} & H_{vv} \end{vmatrix} = 0$$

$$G_{\mathfrak{u}}(X_u, X_u)du^2 + 2G_{\mathfrak{u}}(X_u, X_v)dudv + G_{\mathfrak{u}}(X_v, X_v)dv^2 = 0$$

$$G_{\mathfrak{u}}(duX_u + dvX_v, duX_u + dvX_v) = 0.$$

Por tanto las direcciones asintóticas son los vetores Z tal que

$$G_{\mathfrak{u}}(Z, Z) = 0.$$

Métrica de Blaschke

Sea M una hipersuperfície afín-inmersa en $\mathbb{R}^4$ y sea ξ un campo transversal.

Para X, Y campos vectoriales tangentes

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)\xi$$

$$D_X \xi = -S_\xi X + \theta(X)\xi$$

Teorema

Existe, salvo signo, un único campo vectorial transversal ξ, para el cual las siguientes dos condiciones se verifican

- $\nabla_X \omega = 0$, $\forall X$
- $\omega(X_1, X_2, X_3) = \nu(X_1, X_2, X_3)$

donde

$$\omega(X_1, X_2, X_3) = [X_1, X_2, X_3, \xi]$$

$$\nu(X_1, X_2, X_3) = |\det(h_{ij})|^{1/2}$$

con $h_{ij} = h(X_i, X_j)$

El único campo vectorial ξ es llamado de campo normal afin o normal de Blaschke y lo denotaremos con A.

Sea $x : M \to \mathbb{R}^4$ una inmersión $\mathcal{C}^\infty$.

Consideremos un frame local unimodular $x; e_1, e_2, e_3, e_4$ sobre M.

Podemos escribir

$$dx = \sum_{i=1}^{3} \omega^i e_i.$$

La **métrica de Blaschke** es dada por

$$G = \sum G_{ij} \omega^i \omega^j$$

donde:

- $G_{ij} = |H|^{-1/5} h_{ij}$
- $|H| = \det(h_{ij})$.

Métrica asociada a un campo transversal

Sea M una superfície afín-inmersa en $\mathbb{R}^4$, σ un fibrado plano transversal sobre M.

Sea $\mathfrak{u} = \{X_1, X_2\}$ un frame tangente local sobre una vecindad U de un punto $p \in M$ y sea ξ un campo transversal sobre M.

Definimos la seguinte forma bilinear simétrica sobre M por

$$G_{\mathfrak{u}}(Y, Z) = \frac{1}{2}([X_1, X_2, D_Z Y, \xi] + [X_1, X_2, D_Y Z, \xi]).$$

Fijemos η_1, η_2 que generan el plano σ_p y sea $\xi = b_1\eta_1 + b_2\eta_2$,

$$G_{\mathfrak{u}}(X_1, X_1) = b_2 h^1(X_1, X_1) - b_1 h^2(X_1, X_1)$$

$$G_{\mathfrak{u}}(X_1, X_2) = b_2 h^1(X_1, X_2) - b_1 h^2(X_1, X_2)$$

$$G_{\mathfrak{u}}(X_2, X_2) = b_2 h^1(X_2, X_2) - b_1 h^2(X_2, X_2)$$

Observemos que $det_{\mathfrak{u}} G_{\mathfrak{u}} = 0$ si $b_2\eta_1 - b_1\eta_2$ es una dirección binormal afín.

Definimos la siguiente forma cuadrática:

$$g_{\mathfrak{u}}(Y, Z) = \frac{G_{\mathfrak{u}}(Y, Z)}{(det_{\mathfrak{u}} G_{\mathfrak{u}})^{\frac{1}{4}}},$$

Teorema

La forma cuadrática g_u no depende del frame tangente $\mathfrak{u}$. Denotaremos esta forma cuadrática por G_ξ.

Llamaremos G_ξ de métrica asociada al campo transversal ξ.

Notemos que tenemos una família infinita de métricas, una para cada campo transversal ξ escogido, las cuales pueden coincidir para diferentes campos transversales.

Superfície inmersa en una hiperesferas afín

Una hipersuperfície H en $\mathbb{R}^4$ es llamada una hiperesfera afín si las líneas normal afín pasando por cualquier punto de la superfície:

- se intersectan en un punto, llamado su centro (hiperesfera propia) o
- son mutuamente paralelas (hiperesfera impropia).

Paraboloide elíptico

$w = \frac{x^2+y^2+z^2}{2}$

Elipsoide

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{w^2}{d^2} = 1$

Hiperboloide

$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -1$

Superfície inmersa en un paraboloide elíptico

$$X(u,v) = (u, v, \varphi(u,v), \frac{u^2+v^2+\varphi(u,v)^2}{2})$$

Métrica de Blaschke G:

$$G(X_u, X_u) = 1 + \varphi_u^2 \quad G(X_u, X_v) = \varphi_u \varphi_v \quad G(X_v, X_v) = 1 + \varphi_v^2.$$

Considerando el campo: $\xi = -\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}\ (0, 0, 1, \varphi(u,v))$

$$g_\xi = G.$$

Superfície inmersa en un hiperboloide

$$X(u,v)=(u,v,\varphi(u,v),\sqrt{1+u^2+v^2+\varphi(u,v)^2})$$

Métrica de Blaschke G:

$$G(X_u,X_u)=\frac{1+v^2+\varphi^2-2u\varphi\varphi_u+(1+u^2+v^2)\varphi_u^2}{1+u^2+v^2+\varphi^2}$$

$$G(X_u,X_v)=\frac{-uv+(1+u^2+v^2)\varphi_u\varphi_v-\varphi(u\varphi_v+v\varphi_u)}{1+u^2+v^2+\varphi^2}$$

$$G(X_v,X_v)=\frac{1+u^2+\varphi^2-2v\varphi\varphi_v+(1+u^2+v^2)\varphi_v^2}{1+u^2+v^2+\varphi^2}.$$

Considerando el campo:

$$\xi = -\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2+(\varphi-u\varphi_u-v\varphi_v)^2}\ (0,0,1,\frac{\varphi}{\sqrt{1+u^2+v^2+\varphi^2}})$$

$$g_\xi = G.$$

Preguntas en estudio

- Para una superfície afin inmersa en una hipersuperfície contenida en $\mathbb{R}^4$, existe un campo transversal ξ tal que la métrica g_ξ coincide con la métrica de Blaschke restringida a la superfície?
- Los planos normal afín según la métrica afín g (Nomizu y Vrancken, 1993) son "mejores" que los planos normal afín según la métrica g_ξ?
- Existe definido de manera única un campo transversal ξ que defina una "mejor"métrica dentro de la família g_ξ?

Dirce Kiyomi Hayashida Mochida, Maria Del Carmen Romero Fuster, and Maria Aparecida Soares Ruas.
The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint.
Geom. Dedicata, 54(3):323–332, 1995.

Katsumi Nomizu and Luc Vrancken.
A new equiaffine theory for surfaces in $\mathbf{R}^4$.
Internat. J. Math., 4(1):127–165, 1993.

J. J. Nuño-Ballesteros and M. C. Romero-Fuster.
Contact properties of codimension 2 submanifolds with flat normal bundle.
Rev. Mat. Iberoam., 26(3):799–824, 2010.