Caracterización de espacios R(X) y rango óptimo del operador de Hardy.

Pedro Tradacete
(Universidad Carlos III de Madrid)

IUMPA - UPV
23 de mayo de 2012

Operador de Hardy menos la identidad

Recientemente, diversos autores han estudiado estimaciones del operador diferencia

$$f^{**} - f^{*} = S(f^{*}) - \mathrm{Id}\,(f^{*}),$$

donde f^{*} es la reordenada decreciente de f y

$$f^{**}(t) = S(f^{*})(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^{*}(s)ds.$$

Esto es equivalente a considerar el operador de Hardy menos la identidad restringido al cono de las funciones decrecientes y así obtener estimaciones de la oscilación de la función f.

Estos resultados tienen aplicaciones a las inclusiones óptimas de Sobolev y al principio de simetrización de Pólya–Szegö.

Operador de Hardy menos la identidad

Recientemente, diversos autores han estudiado estimaciones del operador diferencia

$$f^{**} - f^{*} = S(f^{*}) - \mathrm{Id}\,(f^{*}),$$

donde f^* es la reordenada decreciente de f y

$$f^{**}(t) = S(f^{*})(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^{*}(s)ds.$$

Esto es equivalente a considerar el operador de Hardy menos la identidad restringido al cono de las funciones decrecientes y así obtener estimaciones de la oscilación de la función f.

Estos resultados tienen aplicaciones a las inclusiones óptimas de Sobolev y al principio de simetrización de Pólya–Szegö.

Operador de Hardy menos la identidad

Recientemente, diversos autores han estudiado estimaciones del operador diferencia

$$f^{**} - f^{*} = S(f^{*}) - \mathrm{Id}\,(f^{*}),$$

donde f^{*} es la reordenada decreciente de f y

$$f^{**}(t) = S(f^{*})(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^{*}(s)ds.$$

Esto es equivalente a considerar el operador de Hardy menos la identidad restringido al cono de las funciones decrecientes y así obtener estimaciones de la oscilación de la función f.

Estos resultados tienen aplicaciones a las inclusiones óptimas de Sobolev y al principio de simetrización de Pólya–Szegö.

Kruglyak y Setterqvist [PAMS, 2008] probaron que la norma de $S - \mathrm{Id}$ en L^p_{dec}, $p \in \{2, 3, \dots\}$ era igual a

$$\|S - \mathrm{Id}\|_{L^p_{\mathrm{dec}}} = \frac{1}{(p-1)^{1/p}},$$

y conjeturaron que el resultado sería cierto para todo $p \geq 2$.

Teorema (Boza – Soria)

Sea $p \geq 2$ y w un peso en la clase B_p satisfaciendo que

$$r^{p-1} \int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p}\, dx,$$

es una función decreciente, $r > 0$. Entonces,

$$\|Sf - f\|_{L^p(w)} \leq \|w\|_{B_p}^{1/p} \|f\|_{L^p_{\mathrm{dec}}(w)},$$

y $\|w\|_{B_p}^{1/p}$ es la mejor constante.

Kruglyak y Setterqvist [PAMS, 2008] probaron que la norma de $S - \mathrm{Id}$ en L^p_{dec}, $p \in \{2, 3, \dots\}$ era igual a

$$\|S - \mathrm{Id}\|_{L^p_{\mathrm{dec}}} = \frac{1}{(p-1)^{1/p}},$$

y conjeturaron que el resultado sería cierto para todo $p \geq 2$.

Teorema (Boza – Soria)

Sea $p \geq 2$ y w un peso en la clase B_p satisfaciendo que

$$r^{p-1} \int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p}\, dx,$$

es una función decreciente, $r > 0$. Entonces,

$$\|Sf - f\|_{L^p(w)} \leq \|w\|_{B_p}^{1/p} \|f\|_{L^p_{\mathrm{dec}}(w)},$$

y $\|w\|_{B_p}^{1/p}$ es la mejor constante.

Kruglyak y Setterqvist [PAMS, 2008] probaron que la norma de $S - \mathrm{Id}$ en L^p_{dec}, $p \in \{2, 3, \dots\}$ era igual a

$$\|S - \mathrm{Id}\|_{L^p_{\mathrm{dec}}} = \frac{1}{(p-1)^{1/p}},$$

y conjeturaron que el resultado sería cierto para todo $p \geq 2$.

Teorema (Boza – Soria)

Sea $p \geq 2$ y w un peso en la clase B_p satisfaciendo que

$$r^{p-1} \int_r^\infty \frac{w(x)}{x^p}\, dx,$$

es una función decreciente, $r > 0$. Entonces,

$$\|Sf - f\|_{L^p(w)} \leq \|w\|_{B_p}^{1/p} \|f\|_{L^p_{\mathrm{dec}}(w)},$$

y $\|w\|_{B_p}^{1/p}$ es la mejor constante.

Sea X un espacio invariante por reordenamientos (r.i.) en $\mathbb{R}^n$. Estamos interesados en estudiar la norma del operador $S - \mathrm{Id}$ en X, para el operador de Hardy n-dimensional, restringido a funciones f que son radiales y decrecientes:

$$S_n f(x) = \frac{1}{|B(0,|x|)|} \int_{B(0,|x|)} f(y)\, dy.$$

Como

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{v_n |x|^n} \int_{f(x)}^{\infty} \lambda_f(t)\, dt,$$

(donde $\lambda_f(t) = |\{x : |f(x)| > t\}|$), entonces usando la desigualdad integral de Minkowski:

$$\|S_n f - f\|_X \leq \int_0^{\infty} v_n^{-1} \lambda_f(t) \left\| \frac{1}{v_n^{-1}\lambda_f(t) + |\cdot|^n} \right\|_X dt.$$

Espacios r.i. minimales

Sea X un espacio invariante por reordenamientos (r.i.) en $\mathbb{R}^n$. Estamos interesados en estudiar la norma del operador $S - \mathrm{Id}$ en X, para el operador de Hardy n-dimensional, restringido a funciones f que son radiales y decrecientes:

$$S_n f(x) = \frac{1}{|B(0,|x|)|} \int_{B(0,|x|)} f(y)\,dy.$$

Como

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{v_n |x|^n} \int_{f(x)}^{\infty} \lambda_f(t)\,dt,$$

(donde $\lambda_f(t) = |\{x : |f(x)| > t\}|$), entonces usando la desigualdad integral de Minkowski:

$$\|S_n f - f\|_X \leq \int_0^{\infty} v_n^{-1} \lambda_f(t) \left\| \frac{1}{v_n^{-1}\lambda_f(t) + |\cdot|^n} \right\|_X dt.$$

Espacios r.i. minimales

Sea X un espacio invariante por reordenamientos (r.i.) en $\mathbb{R}^n$. Estamos interesados en estudiar la norma del operador $S - \mathrm{Id}$ en X, para el operador de Hardy n-dimensional, restringido a funciones f que son radiales y decrecientes:

$$S_n f(x) = \frac{1}{|B(0,|x|)|} \int_{B(0,|x|)} f(y)\, dy.$$

Como

$$S_n f(x) - f(x) = \frac{1}{v_n |x|^n} \int_{f(x)}^{\infty} \lambda_f(t)\, dt,$$

(donde $\lambda_f(t) = |\{x : |f(x)| > t\}|$), entonces usando la desigualdad integral de Minkowski:

$$\|S_n f - f\|_X \leq \int_0^{\infty} v_n^{-1} \lambda_f(t) \left\| \frac{1}{v_n^{-1} \lambda_f(t) + |\cdot|^n} \right\|_X dt.$$

Por lo tanto, es natural estudiar la clase de funciones para las que el miembro de la derecha es finito, que denominaremos como $R(X)$:

$$\|f\|_{R(X)} = \int_0^\infty v_n^{-1}\lambda_f(t) \left\| \frac{1}{v_n^{-1}\lambda_f(t) + |\cdot|^n} \right\|_X dt < +\infty.$$

Un simple cambio de notación demuestra que la norma en $R(X)$ es igual a:

$$\|f\|_{R(X)} = \|f\|_{\Lambda_{W_X}} = \int_0^\infty W_X(\lambda_f(t))\, dt < +\infty,$$

donde

$$W_X(t) = \left\|E_t g(\cdot)\right\|_X, \quad g(s) = \frac{1}{1+s} \quad \text{y} \quad E_t g(s) = g(s/t).$$

Por lo tanto, es natural estudiar la clase de funciones para las que el miembro de la derecha es finito, que denominaremos como $R(X)$:

$$\|f\|_{R(X)} = \int_0^\infty v_n^{-1}\lambda_f(t)\left\|\frac{1}{v_n^{-1}\lambda_f(t)+|\cdot|^n}\right\|_X dt < +\infty.$$

Un simple cambio de notación demuestra que la norma en $R(X)$ es igual a:

$$\|f\|_{R(X)} = \|f\|_{\Lambda_{W_X}} = \int_0^\infty W_X(\lambda_f(t))\,dt < +\infty,$$

donde

$$W_X(t) = \|E_t g(\cdot)\|_X, \quad g(s) = \frac{1}{1+s} \quad \text{y} \quad E_t g(s) = g(s/t).$$

Ejemplos

- $R(L^1) = \{0\}$
- $R(L^p) = L^{p,1} = \Lambda(L^p)$, $1 < p < \infty$.
- $R(L^\infty) = L^\infty = \Lambda(L^\infty)$.
- Si $\Psi(t) = t \log(1 + 1/t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\Psi \subsetneq L^1 + L^\infty = \Lambda(L^1 + L^\infty).$$
- Si $\Phi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(M_\Phi) = L^1 \cap L^\infty \subsetneq \Lambda_\Phi,$$
$$\|f\|_{M_\Phi} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\Phi(t), \quad \text{espacio de Marcinkiewicz.}$$
- R es monótono: Si $X_1 \subset X_2$, entonces $R(X_1) \subset R(X_2)$.

Ejemplos

- $R(L^1) = \{0\}$
- $R(L^p) = L^{p,1} = \Lambda(L^p)$, $1 < p < \infty$.
- $R(L^\infty) = L^\infty = \Lambda(L^\infty)$.
- Si $\Psi(t) = t \log(1 + 1/t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\Psi \subsetneq L^1 + L^\infty = \Lambda(L^1 + L^\infty).$$
- Si $\Phi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(M_\Phi) = L^1 \cap L^\infty \subsetneq \Lambda_\Phi,$$
$$\|f\|_{M_\Phi} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\Phi(t), \quad \text{espacio de Marcinkiewicz.}$$
- R es monótono: Si $X_1 \subset X_2$, entonces $R(X_1) \subset R(X_2)$.

Ejemplos

- $R(L^1) = \{0\}$
- $R(L^p) = L^{p,1} = \Lambda(L^p)$, $1 < p < \infty$.
- $R(L^\infty) = L^\infty = \Lambda(L^\infty)$.
- Si $\Psi(t) = t \log(1 + 1/t)$, entonces

$$\{0\} \neq R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\Psi \subsetneq L^1 + L^\infty = \Lambda(L^1 + L^\infty).$$

- Si $\Phi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces

$$\{0\} \neq R(M_\Phi) = L^1 \cap L^\infty \subsetneq \Lambda_\Phi,$$

$$\|f\|_{M_\Phi} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\Phi(t), \quad \text{espacio de Marcinkiewicz.}$$

- R es monótono: Si $X_1 \subset X_2$, entonces $R(X_1) \subset R(X_2)$.

Ejemplos

- $R(L^1) = \{0\}$
- $R(L^p) = L^{p,1} = \Lambda(L^p)$, $1 < p < \infty$.
- $R(L^\infty) = L^\infty = \Lambda(L^\infty)$.
- Si $\Psi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\Psi \subsetneq L^1 + L^\infty = \Lambda(L^1 + L^\infty).$$

- Si $\Phi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(M_\Phi) = L^1 \cap L^\infty \subsetneq \Lambda_\Phi,$$
$$\|f\|_{M_\Phi} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\Phi(t), \quad \text{espacio de Marcinkiewicz.}$$

- R es monótono: Si $X_1 \subset X_2$, entonces $R(X_1) \subset R(X_2)$.

Ejemplos

- $R(L^1) = \{0\}$
- $R(L^p) = L^{p,1} = \Lambda(L^p)$, $1 < p < \infty$.
- $R(L^\infty) = L^\infty = \Lambda(L^\infty)$.
- Si $\Psi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\Psi \subsetneq L^1 + L^\infty = \Lambda(L^1 + L^\infty).$$
- Si $\Phi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(M_\Phi) = L^1 \cap L^\infty \subsetneq \Lambda_\Phi,$$
$$\|f\|_{M_\Phi} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\Phi(t), \quad \text{espacio de Marcinkiewicz.}$$
- R es monótono: Si $X_1 \subset X_2$, entonces $R(X_1) \subset R(X_2)$.

Ejemplos

- $R(L^1) = \{0\}$
- $R(L^p) = L^{p,1} = \Lambda(L^p)$, $1 < p < \infty$.
- $R(L^\infty) = L^\infty = \Lambda(L^\infty)$.
- Si $\Psi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\Psi \subsetneq L^1 + L^\infty = \Lambda(L^1 + L^\infty).$$
- Si $\Phi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces
$$\{0\} \neq R(M_\Phi) = L^1 \cap L^\infty \subsetneq \Lambda_\Phi,$$
$$\|f\|_{M_\Phi} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\Phi(t), \quad \text{espacio de Marcinkiewicz.}$$
- R es monótono: Si $X_1 \subset X_2$, entonces $R(X_1) \subset R(X_2)$.

Teorema (Rodríguez-López – Soria)

- Son equivalentes:
  - $R(X) \neq \{0\}$.
  - $g^*(s) = 1/(1+s) \in \overline{X}$.
  - $(L^{1,\infty} \cap L^\infty) \subset X$.
- $R(X) \subset \Lambda(X)$.
- Si $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$ es la función fundamental de X,

$$\overline{\varphi}_X(s) = \sup_{t>0} \frac{\varphi_X(st)}{\varphi_X(t)}$$

y

$$\overline{\beta}_X = \inf_{s>1} \frac{\log \overline{\varphi}_X(s)}{\log s}$$

es el índice fundamental superior, entonces

$$\Lambda(X) = R(X) \iff \overline{\beta}_X < 1.$$

Teorema (Rodríguez-López – Soria)

- Son equivalentes:
  - $R(X) \neq \{0\}$.
  - $g^*(s) = 1/(1+s) \in \overline{X}$.
  - $(L^{1,\infty} \cap L^\infty) \subset X$.
- $R(X) \subset \Lambda(X)$.
- Si $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$ es la función fundamental de X,

$$\overline{\varphi}_X(s) = \sup_{t>0} \frac{\varphi_X(st)}{\varphi_X(t)}$$

  y

$$\overline{\beta}_X = \inf_{s>1} \frac{\log \overline{\varphi}_X(s)}{\log s}$$

  es el índice fundamental superior, entonces

$$\Lambda(X) = R(X) \iff \overline{\beta}_X < 1.$$

Teorema (Rodríguez-López – Soria)

- Son equivalentes:
  - $R(X) \neq \{0\}$.
  - $g^*(s) = 1/(1+s) \in \overline{X}$.
  - $(L^{1,\infty} \cap L^\infty) \subset X$.
- $R(X) \subset \Lambda(X)$.
- Si $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$ es la función fundamental de X,

$$\overline{\varphi}_X(s) = \sup_{t>0} \frac{\varphi_X(st)}{\varphi_X(t)}$$

y

$$\overline{\beta}_X = \inf_{s>1} \frac{\log \overline{\varphi}_X(s)}{\log s}$$

es el índice fundamental superior, entonces

$$\Lambda(X) = R(X) \iff \overline{\beta}_X < 1.$$

Teorema (Rodríguez-López – Soria)

- Son equivalentes:
  - $R(X) \neq \{0\}$.
  - $g^*(s) = 1/(1+s) \in \overline{X}$.
  - $(L^{1,\infty} \cap L^\infty) \subset X$.
- $R(X) \subset \Lambda(X)$.
- Si $\varphi_X(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_X$ es la función fundamental de X,

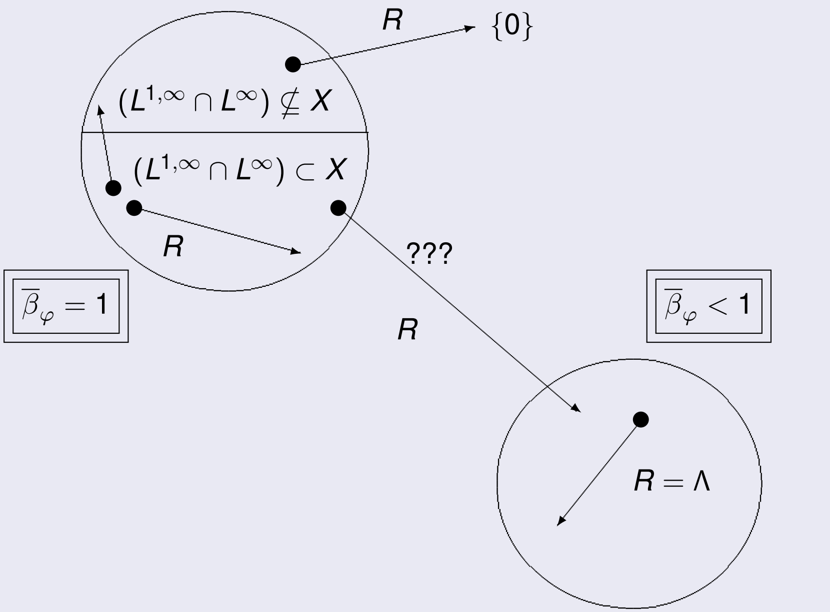
$$\overline{\varphi}_X(s) = \sup_{t>0} \frac{\varphi_X(st)}{\varphi_X(t)}$$

  y

$$\overline{\beta}_X = \inf_{s>1} \frac{\log \overline{\varphi}_X(s)}{\log s}$$

  es el índice fundamental superior, entonces

$$\Lambda(X) = R(X) \iff \overline{\beta}_X < 1.$$


R
$\{0\}$
$(L^{1,\infty} \cap L^{\infty}) \not\subset X$
$(L^{1,\infty} \cap L^{\infty}) \subset X$
R
???
$\overline{\beta}_{\varphi} = 1$
R
$\overline{\beta}_{\varphi} < 1$
$R = \Lambda$

Rango de R

Como R es un funtor monótono entonces, dado cualquier X r.i.,

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \subset \Lambda_\Psi = R(L^1 + L^\infty),$$

y, por lo tanto, $W_X(t) \gtrsim \Psi(t) = t \log(1 + 1/t)$.

Nos interesamos ahora en estudiar el rango de R; es decir, cuándo dado un espacio de Lorentz Λ_φ existe un X tal que

$$R(X) = \Lambda_\varphi.$$

Por lo anterior, necesariamente φ ha de ser cuasicóncava y:

$$\varphi(t) \gtrsim t \log(1 + 1/t).$$

Sabemos que si $\overline{\beta}_\varphi < 1$, entonces $R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi$, por lo que sería suficiente considerar el caso $\overline{\beta}_\varphi = 1$.

Rango de R

Como R es un funtor monótono entonces, dado cualquier X r.i.,

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \subset \Lambda_\Psi = R(L^1 + L^\infty),$$

y, por lo tanto, $W_X(t) \gtrsim \Psi(t) = t \log(1 + 1/t)$.

Nos interesamos ahora en estudiar el rango de R; es decir, cuándo dado un espacio de Lorentz Λ_φ existe un X tal que

$$R(X) = \Lambda_\varphi.$$

Por lo anterior, necesariamente φ ha de ser cuasicóncava y:

$$\varphi(t) \gtrsim t \log(1 + 1/t).$$

Sabemos que si $\overline{\beta}_\varphi < 1$, entonces $R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi$, por lo que sería suficiente considerar el caso $\overline{\beta}_\varphi = 1$.

Rango de R

Como R es un funtor monótono entonces, dado cualquier X r.i.,

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \subset \Lambda_\Psi = R(L^1 + L^\infty),$$

y, por lo tanto, $W_X(t) \gtrsim \Psi(t) = t\log(1 + 1/t)$.

Nos interesamos ahora en estudiar el rango de R; es decir, cuándo dado un espacio de Lorentz Λ_φ existe un X tal que

$$R(X) = \Lambda_\varphi.$$

Por lo anterior, necesariamente φ ha de ser cuasicóncava y:

$$\varphi(t) \gtrsim t\log(1 + 1/t).$$

Sabemos que si $\overline{\beta}_\varphi < 1$, entonces $R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi$, por lo que sería suficiente considerar el caso $\overline{\beta}_\varphi = 1$.

Rango de R

Como R es un funtor monótono entonces, dado cualquier X r.i.,

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \subset \Lambda_\Psi = R(L^1 + L^\infty),$$

y, por lo tanto, $W_X(t) \gtrsim \Psi(t) = t\log(1 + 1/t)$.

Nos interesamos ahora en estudiar el rango de R; es decir, cuándo dado un espacio de Lorentz Λ_φ existe un X tal que

$$R(X) = \Lambda_\varphi.$$

Por lo anterior, necesariamente φ ha de ser cuasicóncava y:

$$\varphi(t) \gtrsim t\log(1 + 1/t).$$

Sabemos que si $\overline{\beta}_\varphi < 1$, entonces $R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi$, por lo que sería suficiente considerar el caso $\overline{\beta}_\varphi = 1$.

Rango óptimo

Si φ es cuasicóncava, denotamos por $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$ al menor espacio r.i. Y, tal que $S : \Lambda_\varphi \to Y$ es acotado ¡SI EXISTE!

Teorema (Soria – T.)

Sea φ cuasicóncava. Son equivalentes:

- $\varphi(t) \gtrsim t \log(1 + 1/t)$.
- Existe $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$.

Si esto ocurre, entonces:

$$\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi] = \left\{ f \in L^1 + L^\infty : f^{**} \leq (Sg)^{**}, \Lambda_\varphi \ni g \downarrow \right\},$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]} = \inf \left\{ \|g\|_{\Lambda_\varphi} : f^{**} \leq (Sg)^{**} \right\}.$$

Rango óptimo

Si φ es cuasicóncava, denotamos por $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$ al menor espacio r.i. Y, tal que $S : \Lambda_\varphi \to Y$ es acotado ¡SI EXISTE!

Teorema (Soria – T.)

Sea φ cuasicóncava. Son equivalentes:

- $\varphi(t) \gtrsim t \log(1 + 1/t)$.
- Existe $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$.

Si esto ocurre, entonces:

$$\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi] = \left\{ f \in L^1 + L^\infty : f^{**} \leq (Sg)^{**}, \Lambda_\varphi \ni g \downarrow \right\},$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]} = \inf \left\{ \|g\|_{\Lambda_\varphi} : f^{**} \leq (Sg)^{**} \right\}.$$

Rango óptimo

Si φ es cuasicóncava, denotamos por $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$ al menor espacio r.i. Y, tal que $S : \Lambda_\varphi \to Y$ es acotado ¡SI EXISTE!

Teorema (Soria – T.)

Sea φ cuasicóncava. Son equivalentes:

- $\varphi(t) \gtrsim t \log(1 + 1/t)$.
- Existe $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$.

Si esto ocurre, entonces:

$$\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi] = \left\{ f \in L^1 + L^\infty : f^{**} \leq (Sg)^{**}, \Lambda_\varphi \ni g \downarrow \right\},$$

dotado con la norma

$$\|f\|_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]} = \inf \left\{ \|g\|_{\Lambda_\varphi} : f^{**} \leq (Sg)^{**} \right\}.$$

El espacio $\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]$ es la clave para describir el rango de R:

Teorema (Soria – T.)

Sea $\varphi(t) \gtrsim t\log(1+1/t)$. Si existe X r.i. tal que $R(X)=\Lambda_\varphi$, entonces

$$R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi.$$

El estudio de la función fundamental de $\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]$

$$\varphi_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]}(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]} \approx \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r\log(1+\frac{t}{r})},$$

nos lleva a considerar la siguiente función:

$$\widetilde{\varphi}(t) = \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r\log(1+\frac{t}{r})}.$$

El espacio $\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]$ es la clave para describir el rango de R:

Teorema (Soria – T.)

Sea $\varphi(t) \gtrsim t\log(1+1/t)$. Si existe X r.i. tal que $R(X)=\Lambda_\varphi$, entonces

$$R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi.$$

El estudio de la función fundamental de $\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]$

$$\varphi_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]}(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]} \approx \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r\log(1+\frac{t}{r})},$$

nos lleva a considerar la siguiente función:

$$\widetilde{\varphi}(t) = \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r\log(1+\frac{t}{r})}.$$

El espacio $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$ es la clave para describir el rango de R:

Teorema (Soria – T.)

Sea $\varphi(t) \gtrsim t \log(1 + 1/t)$. Si existe X r.i. tal que $R(X) = \Lambda_\varphi$, entonces

$$R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi.$$

El estudio de la función fundamental de $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$

$$\varphi_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]}(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]} \approx \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r \log(1 + \frac{t}{r})},$$

nos lleva a considerar la siguiente función:

$$\widetilde{\varphi}(t) = \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r \log(1 + \frac{t}{r})}.$$

El espacio $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$ es la clave para describir el rango de R:

Teorema (Soria – T.)

Sea $\varphi(t) \gtrsim t\log(1+1/t)$. Si existe X r.i. tal que $R(X) = \Lambda_\varphi$, entonces

$$R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi.$$

El estudio de la función fundamental de $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$

$$\varphi_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]}(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_{\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]} \approx \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r\log(1+\frac{t}{r})},$$

nos lleva a considerar la siguiente función:

$$\widetilde{\varphi}(t) = \inf_{r>0} \frac{t\varphi(r)}{r\log(1+\frac{t}{r})}.$$

Análogamente al caso anterior, hemos probado una propiedad de optimalidad para el espacio de Marcinkiewicz $M_{\widetilde{\varphi}}$:

$$\|f\|_{M_{\widetilde{\varphi}}} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\widetilde{\varphi}(t).$$

Teorema (Soria – T.)

Si φ es una función cuasicóncava y $\varphi(t) \geq Ct\log(1+1/t)$, entonces

$$\Lambda_{\varphi} \subset R(M_{\widetilde{\varphi}}).$$

Además, esta inclusión es óptima entre los espacios de Marcinkiewicz: Si existe otra función Φ para la que

$$\Lambda_{\varphi} = R(M_{\Phi}),$$

entonces

$$\Lambda_{\varphi} = R(M_{\widetilde{\varphi}}).$$

Análogamente al caso anterior, hemos probado una propiedad de optimalidad para el espacio de Marcinkiewicz $M_{\widetilde{\varphi}}$:

$$\|f\|_{M_{\widetilde{\varphi}}} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\widetilde{\varphi}(t).$$

Teorema (Soria – T.)

Si φ es una función cuasicóncava y $\varphi(t) \geq Ct\log(1+1/t)$, entonces

$$\Lambda_\varphi \subset R(M_{\widetilde{\varphi}}).$$

Además, esta inclusión es óptima entre los espacios de Marcinkiewicz: Si existe otra función Φ para la que

$$\Lambda_\varphi = R(M_\Phi),$$

entonces

$$\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}}).$$

Análogamente al caso anterior, hemos probado una propiedad de optimalidad para el espacio de Marcinkiewicz $M_{\widetilde{\varphi}}$:

$$\|f\|_{M_{\widetilde{\varphi}}} = \sup_{t>0} f^{**}(t)\widetilde{\varphi}(t).$$

Teorema (Soria – T.)

Si φ es una función cuasicóncava y $\varphi(t) \geq Ct\log(1+1/t)$, entonces

$$\Lambda_\varphi \subset R(M_{\widetilde{\varphi}}).$$

Además, esta inclusión es óptima entre los espacios de Marcinkiewicz: Si existe otra función Φ para la que

$$\Lambda_\varphi = R(M_\Phi),$$

entonces

$$\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}}).$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$
$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$
- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1, t)$ y
  $$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$
  - Si $\Psi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1 + \sqrt{t})$ y
  $$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$
  - Si $\varphi(t) = \max(1, t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y
  $$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi.$$

OK

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1, t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi.$$

OK

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1 + \sqrt{t})$ y

$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi.$$

OK

  - Si $\varphi(t) = \max(1, t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi.$$

OK

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1+1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1,t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1+t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1+\sqrt{t})$ y

$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\varphi(t) = \max(1,t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1+1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1,t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1+t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1+\sqrt{t})$ y

$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\varphi(t) = \max(1,t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1, t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1 + \sqrt{t})$ y

$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\varphi(t) = \max(1, t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t \log(1 + 1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1, t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1 + \sqrt{t})$ y

$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\varphi(t) = \max(1, t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1, t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1 + \sqrt{t})$ y

$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\varphi(t) = \max(1, t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$
$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$
- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1+1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1,t)$ y
$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$
  - Si $\Psi(t) = t/\log(1+t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1+\sqrt{t})$ y
$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$
  - Si $\varphi(t) = \max(1,t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y
$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1+1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1,t)$ y

  $$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1+t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1+\sqrt{t})$ y

  $$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\varphi(t) = \max(1,t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

  $$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Conjetura

Conjeturamos que la igualdad $\Lambda_\varphi = R(M_{\widetilde{\varphi}})$ es siempre válida:

- Hemos probado que $\overline{\beta}_\varphi < 1 \iff \varphi \approx \widetilde{\varphi}$. Así, si $\overline{\beta}_\varphi < 1$

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(M_\varphi) = R(\Lambda_\varphi) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

- Ejemplos para los casos $\overline{\beta}_\varphi = 1$:
  - Si $\varphi(t) = t\log(1 + 1/t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \min(1, t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = R(L^1 + L^\infty) = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\Psi(t) = t/\log(1 + t)$, entonces $\widetilde{\Psi}(t) \approx t/\log^2(1 + \sqrt{t})$ y

$$R(M_{\widetilde{\Psi}}) = \Lambda_\Psi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

  - Si $\varphi(t) = \max(1, t)$, entonces $\widetilde{\varphi}(t) \approx \Psi(t)$ y

$$R(M_{\widetilde{\varphi}}) = L^1 \cap L^\infty = \Lambda_\varphi. \qquad \boxed{\text{OK}}$$

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Necesitamos usar el siguiente lema:

$$\Lambda_\varphi \subset R(X) \iff \|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t) \iff S:\Lambda_\varphi \to X$$

La primera equivalencia es inmediata, ya que

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \quad \text{y} \quad W_X(t) \approx \|S\chi_{[0,t]}\|_X.$$

La segunda parte se demuestra viendo que $\|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t)$ es equivalente a la acotación $S:\Lambda_\varphi \to X$, restringido a funciones características χ_A. Así, dada una función $f \in \Lambda_\varphi$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\chi_{A_n}, \qquad A_n = \left\{x : 2^n < |f(x)| \leq 2^{n+1}\right\},$$

$$\|Sf\|_X = \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} S(f\chi_{A_n})\right\|_X \leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n+1}\|\chi_{A_n}\|_{\Lambda_\varphi} \leq 4C\|f\|_{\Lambda_\varphi}.$$

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Necesitamos usar el siguiente lema:

$$\Lambda_\varphi \subset R(X) \iff \|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t) \iff S : \Lambda_\varphi \to X$$

La primera equivalencia es inmediata, ya que

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \quad \text{y} \quad W_X(t) \approx \|S\chi_{[0,t]}\|_X.$$

La segunda parte se demuestra viendo que $\|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t)$ es equivalente a la acotación $S : \Lambda_\varphi \to X$, restringido a funciones características χ_A. Así, dada una función $f \in \Lambda_\varphi$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\chi_{A_n}, \qquad A_n = \left\{x : 2^n < |f(x)| \leq 2^{n+1}\right\},$$

$$\|Sf\|_X = \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} S(f\chi_{A_n})\Big\|_X \leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n+1}\|\chi_{A_n}\|_{\Lambda_\varphi} \leq 4C\|f\|_{\Lambda_\varphi}.$$

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Necesitamos usar el siguiente lema:

$$\Lambda_\varphi \subset R(X) \iff \|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t) \iff S : \Lambda_\varphi \to X$$

La primera equivalencia es inmediata, ya que

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \quad \text{y} \quad W_X(t) \approx \|S\chi_{[0,t]}\|_X.$$

La segunda parte se demuestra viendo que $\|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t)$ es equivalente a la acotación $S : \Lambda_\varphi \to X$, restringido a funciones características χ_A. Así, dada una función $f \in \Lambda_\varphi$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\chi_{A_n}, \qquad A_n = \left\{x : 2^n < |f(x)| \leq 2^{n+1}\right\},$$

$$\|Sf\|_X = \Big\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} S(f\chi_{A_n})\Big\|_X \leq C\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n+1}\|\chi_{A_n}\|_{\Lambda_\varphi} \leq 4C\|f\|_{\Lambda_\varphi}.$$

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Necesitamos usar el siguiente lema:

$$\Lambda_\varphi \subset R(X) \iff \|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t) \iff S : \Lambda_\varphi \to X$$

La primera equivalencia es inmediata, ya que

$$R(X) = \Lambda_{W_X} \quad \text{y} \quad W_X(t) \approx \|S\chi_{[0,t]}\|_X.$$

La segunda parte se demuestra viendo que $\|S\chi_{[0,t]}\|_X \lesssim \varphi(t)$ es equivalente a la acotación $S : \Lambda_\varphi \to X$, restringido a funciones características χ_A. Así, dada una función $f \in \Lambda_\varphi$:

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\chi_{A_n}, \qquad A_n = \left\{x : 2^n < |f(x)| \leq 2^{n+1}\right\},$$

$$\|Sf\|_X = \Big\| \sum_{n\in\mathbb{Z}} S(f\chi_{A_n}) \Big\|_X \leq C \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{n+1} \|\chi_{A_n}\|_{\Lambda_\varphi} \leq 4C\|f\|_{\Lambda_\varphi}.$$

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Como corolario obtenemos que $\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi])$ ya que, claramente, $S : \Lambda_\varphi \to \mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]$.

Finalmente, si existe X satisfaciendo $R(X) = \Lambda_\varphi$, nuevamente por el lema anterior

$$S : \Lambda_\varphi \to X.$$

Pero, gracias a la minimalidad de $\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]$, obtenemos que

$$\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi] \subset X.$$

Así,

$$\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S,\Lambda_\varphi]) \subset R(X) = \Lambda_\varphi.$$

$\square$

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Como corolario obtenemos que $\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi])$ ya que, claramente, $S : \Lambda_\varphi \to \mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$.

Finalmente, si existe X satisfaciendo $R(X) = \Lambda_\varphi$, nuevamente por el lema anterior

$$S : \Lambda_\varphi \to X.$$

Pero, gracias a la minimalidad de $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$, obtenemos que

$$\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi] \subset X.$$

Así,

$$\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) \subset R(X) = \Lambda_\varphi.$$

□

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Como corolario obtenemos que $\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi])$ ya que, claramente, $S : \Lambda_\varphi \to \mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$.

Finalmente, si existe X satisfaciendo $R(X) = \Lambda_\varphi$, nuevamente por el lema anterior

$$S : \Lambda_\varphi \to X.$$

Pero, gracias a la minimalidad de $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$, obtenemos que

$$\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi] \subset X.$$

Así,

$$\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) \subset R(X) = \Lambda_\varphi.$$

□

Demostración de $R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) = \Lambda_\varphi$

Como corolario obtenemos que $\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi])$ ya que, claramente, $S : \Lambda_\varphi \to \mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$.

Finalmente, si existe X satisfaciendo $R(X) = \Lambda_\varphi$, nuevamente por el lema anterior

$$S : \Lambda_\varphi \to X.$$

Pero, gracias a la minimalidad de $\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]$, obtenemos que

$$\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi] \subset X.$$

Así,

$$\Lambda_\varphi \subset R(\mathfrak{R}[S, \Lambda_\varphi]) \subset R(X) = \Lambda_\varphi.$$

$\square$

Muchas gracias.